UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

DE FIN D' ETUDE EN VUE DE L'OBTENSION DE LICENCE EN MATHÉMATIQUES

INTITULÉ

Construction et caractéristique des nombres réels

Présenté par

Achour Rachid

Salem Mohamed

Soutenu le 05 / 07 / 2009 devant le Jury :

K. Aziz Hamani	**Président**	**M.C.B**	**U.Mostaghanem**
H. Bendahmane	**Examinateur**	**M.A.A**	**U.Mostaghanem**
S. M. Bahri	**Encadreur**	**M.C.A**	**U.Mostaghanem**

Dédicace

Tout d'abord, le grand Merci à notre « DIEU» le tout puissant, qui nous a donné la force et la volonté pour finir ce projet.

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents, à mon encadreur Mr.Bahri.

À mes frères : Mokhtar, Kada, Mustafa, Ousama et Nabil.

À mes soeurs : Omlkhair, Mokhtaria et Nada ;

À mes collègues de la promotion Licence de l'année 2009/2010.

Sans oublier tout mes amis sans exception surtout mes très cher amis Houari, Elhabib et Taher.

Salem

Je dédie ce modeste travail à ma mère et mon père, à mon encadreur Mr.Bahri.

A mes fréres : Naceur, Aissa, et mon cher Ismail et à ma soeur : Messeouda.

Et à mes amis sans exception.

A tout promotion du Math de l'année 2009/2010 .

Rachid

Remerciement

Tout d'abord, le grand Merci à notre « DIEU» le tout puissant, qui nous a donné la force et la volonté pour finir ce projet.

Nous remercions nos parents dont le rêve a toujours était de nous voir réussir, qu'ils sachent que leur places est dans nos coeurs.

Nous remercions tout particulièrement Monsieur Sidi Mohamed Bahri pour avoir accepter de nous encadrer et de nous suivre tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nous remercions Madame Karima Aziz Hamani pour avoir accepté de présider notre mémoire.

Aussi, nous remercions Madame Hafida Bendahmane pour avoir examiner notre mémoire.

Un grand merci à Mademoiselle Bouzara, étudiante en Master1 pour la correction et la conception du manuscript.

Nous n'oublions pas nos très chers amis : Hocine, Mostafa, Kadiro, Ibrahim, Lâarbi, Abdallah, Hidaoui qui nous ont aidé dans la saisie de ce mémoire.

Nous remercions aussi nos collègues de promotion licence Math 2009/2010, plus particulièrement : Arabe Aziz, Neki Sayeh, Abdellaoui Amine, Ben Grine Amine.

Sans oublier tous les membres de nos familles : Achour, Salem, Nedjadi, Gouasmi.

En fin nous remercions tous ceux qui de loin ou de prés, ont apportés une gracieuse collaboration pour la confection de ce travail.

Table des matières

INTRODUCTION

La construction du corps $\mathbb{R}$ a commencé avec les travaux de Bolzano et de Cauchy sur les séries (ils connaissaient le critère dit "de Cauchy"). Cauchy définit un nombre irrationnel comme "la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées" (1821) et cette définition a présupposé l'existence des nombres réels. Quand à Bolzano, il est le premier (1835) à tenter de fonder la théorie des nombres réels sur une base purement arithmétique, bien qu'elle manquât de rigueur. Citons aussi Hamilton (1837), Bertrand (1849) et Weierstrass (1863) qui ont également travaillé à ce sujet ([2]). Dans notre memoire on va surtout s'intéresser aux travaux de Cauchy et de Dedekind qui ont donné deux constructions différentes de l'ensemble des nombres réels. Au fait nous allons répondre aux questions suivantes :

- Qu'est ce que c'est les nombres réels ?
- D'ou viennent-ils ?
- Comment peut-on les construire ?

Il est à souligner que nous avons passer quelques preuves de resultats qu'on a estimer trop technique.

Chapitre 1

Historique

1.1 L'ensemble des entiers naturels

La construction de l'ensemble des réels commence par l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, où

$$\mathbb{N} = 1, 2, 3...$$

selon le procédé suivant :

$$\begin{gathered} 0 = card(\emptyset) \\ \downharpoonleft s : successeur \\ \downharpoonleft s \\ 1 = card(\{\emptyset\}) \\ \vdots \\ n =? \\ \vdots \end{gathered}$$

Cette construction s'appelle le processus de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un successeur du nombre naturel n, noté $S(n)$ et il est unique telle que $S(n) \in \mathbb{N}$.
Comme 0 n'est pas un successeur, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \neq S(n)$ et on écrit

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Soit l'équation

$$x + a = b \ / \quad a, b \in \mathbb{N}, \tag{1.1.1}$$

Cette équation n'admet pas toujours une solution dans $\mathbb{N}$ (il suffit de prendre $b < a$).
De même pour l'équation

$$xa = b \ \ /a, b \in \mathbb{N} \text{ et } (a \neq 0), \tag{1.1.2}$$

(dans le cas où a ne divise pas b).

$\mathbb{N}$ est **totalement ordonnée** et on a que **tout sous ensembles de $\mathbb{N}$ admet une borne inferieur mais n'admet pas une borne superieur**.

Pour trouver les solutions de l'équation (1.1.1), il faut construire un autre ensemble qui s'appelle l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$ et qui est construit par symétrie par rapport à 0.

1.2 L'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \cdots\}.$$

Ainsi défini, dans $\mathbb{Z}$ on peut résoudre l'équation (1.1.1). Au fait, on a :

Proposition 1.2.1 *$\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe additif.*

Maintenant toute équation sous forme

$$x + a = b/ \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

admet une solution dans $\mathbb{Z}$.

Mais on a encore le problème de l'équation

$$xa = b \ / \quad a, \ b \in \mathbb{Z},$$

qui n'admet pas toujours une solution dans $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ est totalement ordonné, mais **tout sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ peut ne pas avoir de borne inferieur et borne superieur**.

1.3 L'ensemble des nombres rationnels

Pour commencer, on va se concentrer sur l'équation

$$xa = b \ /...a, b \in \mathbb{Z} \ \text{ et } (a \neq 0). \tag{1.3.1}$$

On construit une extension de $\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ qui est appelé l'ensemble des rationnels, tel que

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}/p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\},$$

et dans lequel **l'équation (1.3.1) aura toujours une solution**. En fait, on complétera l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour former un corps $\mathbb{Q}$ (il ya distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) qui contiendra une sous-structure algébrique isomorphe à $\mathbb{Z}$, ainsi dans $\mathbb{Q}$ tout élément (à l'exception de 0) aura un inverse multiplicatif et par suite sur ce nouvel ensemble la division (sauf avec le 0) sera toujours possible.

$\mathbb{Q}$ **est totalement ordonné** mais nous avons toujours le problème des sous-ensembles de $\mathbb{Q}$ qui peuvent ne pas avoir de borne inferieur et borne superieur.

Malgré tout ça il y a des opérations arithmétiques simples, qui ne sont pas possible dans l'ensemble des nombres rationnels. Ainsi, par exemple il n'y a aucun nombre rationnel dont le carré est égale à 2. En effet, supposons qu'un tel nombre rationnel r existe tel que :

$$r = \frac{p}{q} \text{ avec } (q \neq 0),$$

où p, q sont des entiers et p, q n'ont aucun facteur commun $(p \wedge q = 1)$, on aurait

$$p^2 = 2q^2.$$

Donc

$$p = 2\frac{q^2}{p} \Rightarrow p = 2p' \Rightarrow 2 \text{ divise } p.$$

Alors,

$$\begin{aligned} p^2 &= 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2, \\ &\Rightarrow 2 \text{ divise } q. \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que p, q n'ont aucun facteur commun $(p \wedge q = 1)$,donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

On conclu que :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

De plus, comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ alors il existe un autre ensemble qui contient $\mathbb{Q}$ et conserve les opérations qui ne sont pas définies dans $\mathbb{Q}$, il est noté $\mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels).

Ainsi :

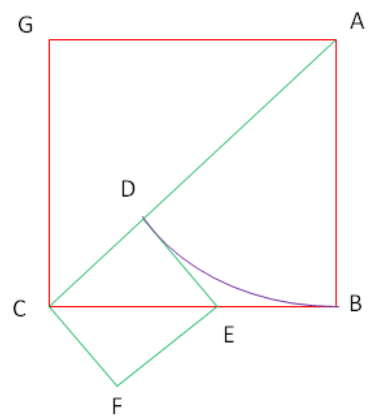
1. les problèmes(1.1.1) et (1.1.2) seront toujours résolubles dans $\mathbb{R}$;
2. $\mathbb{R}$ est totalement ordonnée ;
3. Tout sous ensemble E de $\mathbb{R}$ majoré admet une borne superieur ($\sup E$), et tout sous ensemble E de $\mathbb{R}$ minoré admet une borne inferieur ($\inf E$);

1.4 La notion de l'infini

Le problème de la diagonale du carée $ABCG$, est de comparer la diagonale AC avec l'un des cotés par exemple

$$\frac{AC}{AB} = x.$$

titre (1.4.1)



$_1$*.pdf*

Géométriquement (voir fig.), nous rabattant le coté AB sur le diagonale AC, donc

$$AB = AD,$$

alors

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{DC}{AD}.$$

On veut estimer $\frac{DC}{AD}$, passant par D la tangente à l'arc BD, alors

$$ED = CD \quad \text{(car le triangle } CDE \text{ est isocéle).}$$

D'autre part,

$$BE = DE \quad \text{(car les tangentes sont égeaux).}$$

Ainsi,

$$\frac{DC}{AD} = \frac{DC}{BC} = \frac{BE}{BE + EC} = \frac{1}{\frac{BE+EC}{BE}} = \frac{1}{1 + \frac{EC}{BE}}.$$

Vu que les carrés $ABCG$ et $DBFC$ sont semblables, alors

$$\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{AB} = x,$$

donc

$$x = 1 + \frac{1}{1+x} = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+x}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+x}}} = \cdots infinie.$$

Chapitre 2

Méthode de Cauchy

Le but de cette méthode est de présenter une étude rigoureuse des suites de nombres réels. On insistera notamment sur la notion de convergence et son utilisation en analyse réelle comme moyen d'approcher par exemple certains nombres irrationnels par des nombres rationnels. On donnera ensuite quelques exemples pour illustrer la méthode d'itération succeessive en montrant comment les suites convergentes peuvent être utilisées pour approcher les nombres réels solutions de certaines équations non linéaires.
Commençant par les entiers positifs

$$1, 2, 3, \ldots, \text{zéro},$$

et ensuite les entiers

$$-1, -2, -3 \ldots$$

A partir de là, nous allons aux nombres rationnels de la forme $\frac{m}{n}$, où m, n sont des entiers (on peut prendre $m = 0$, mais $n \neq 0$).
Cependant, nous constatons vite que ces nombres rationnels sont insuffisants. Considérons l'exemple suivant :

Example 1 *Il est tout à fait clair qu'il n'éxiste pas de nombres rationnels tels que*

$$x^2 = 2 \tag{2.0.1}$$

L'équation (2.0.1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$, pour résoudre cette équation on utilise la méthode numérique (point fixe).

On considère une suite de nombres rationnels $x_1, x_2 \ldots,$ *dont les carrés tendent vers* 2 *quand* $n \longrightarrow +\infty$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$$

Si on commence par $x_1 = 1$, *on trouve la suite*

$$1, \frac{3}{2}, \ \frac{17}{12}, \ \frac{577}{408}... \tag{2.0.2}$$

Notons que

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n^2 - 2)^2}{4x_n^2}.$$

De sorte que, les x_n *sont tous trop grands c'est-à-dire*

$$x_n^2 > 2, \quad n \geq 2.$$

$$x_{n+1}^2 - 2 < \frac{(x_n^2 - 2)^2}{8} \tag{2.0.3}$$

Si $n = 2$,

$$x_2^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

Ainsi,

$$x_3^2 - 2 < \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4^2}$$

$$\begin{aligned} x_4^2 - 2 \quad &< \quad \frac{1}{8} \cdot (\frac{1}{8 \cdot 4^2})^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De sorte que, étant donné toute petite quantité $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un entier* N *tel.que*

$$x_n^2 - 2 < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Ainsi, les termes de la suite $x_1^2, x_2^2 \ldots$*tendent vers* 2, *et nous écrivons :*

$$\lim_{n \to \infty} x_n^2 = 2.$$

D'aprés cet exemple, nous pouvons introduire une **définition formelle d'une suite convergente**.

Définition 2.0.1 *La suite $x_1, x_2 \ldots,$ converge vers a si, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver N_ε (dépendant de ε) t.q :*

$$\forall n > N_\varepsilon : \mid x_n - a \mid < \varepsilon.$$

Notons que tous les nombres de cette définition, c'est-à-dire

$$x_1, x_{2,} \ldots, a, \varepsilon$$

doivent être interprétés comme nombres rationnels.

Remarque 2.0.1

i) La suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ t.q \ \forall n \geq N_\varepsilon \ on \ a \ \mid x_n \mid < \varepsilon.$$

ii) Une suite ne peut converge vers deux limites différentes

Définition 2.0.2 *Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon / \ \forall p > q \geq N_\varepsilon \Rightarrow \mid x_p - x_q \mid < \varepsilon.$$

Proposition 2.0.1 *1. Toute suite convergente est suite de Cauchy.*

2. Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve. (voir par exemple [6] p. 3) □

Remarque 2.0.2 *l' inverse de la première assertion n'est pas vraie, car par exemple la suite (2.0.2) est une suite de Cauchy mais ne converge pas vers un nombre rationnel, et à ce stade c'est le seul type de nombre que nous avons.*

Ce que nous voulons faire maintenant est d'étendre la définition d'un nombre de sorte que toute suite de Cauchy soit une suite convergente. Pour cela pensons à l'exemple (1), nous voudrions définir un nombre $\sqrt{2}$.

Nous pourrions associé ce nombre à la suite (2.0.2), mais il ya d'autres suites dont les carrés convergent vers 2 par exemple :

$$x_1 = 1, \text{on trouve la suite : } 1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \ldots$$

$$x_1 = 10, \text{on trouve la suite : } 10, \frac{51}{10}, \frac{2801}{1020}, \ldots$$

$$x_1 = \frac{3}{4}, \text{on trouve la suite : } \frac{3}{4}, \frac{41}{24}, \frac{2833}{1968}, \ldots$$

où la suite décimale tronquée :

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \ldots \text{etc}$$

Nous devons associer à $\sqrt{2}$ toutes ses suites. Ceci nous amène au concept d'une classe d'équivalence de suites de Cauchy.

Définition 2.0.3 *Deux suites de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites équivalentes et l'on note $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \mid x_n - y_n \mid = 0.$$

Alors, on peut définir une relation d'équivalence $\sim$ et nous pouvons introduire la définition suivante :

Définition 2.0.4 *A toute suite de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nous pouvons associer toutes les suites de Cauchy qui lui sont équivalentes, nous appelons cette classe une classe d'équivalence x.*

Remarque 2.0.3 *Les classes d'équivalences divisent toutes les suites de Cauchy en groupes séparés, une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut appartenir à deux classes différentes .*

En effet, nous avons :
si $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ appartiennent à deux classes d'équivalences différentes x et y (respectivement), alors

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ et } \exists N \ \text{ t.q } \mid x_n - y_m \mid > \varepsilon \ ; \forall m, n \geq N.$$

Cela signifi que deux classes d'équivalences différentes sont séparés les unes des autres dans le sens indiqué dans ce problème .

En outre, on peut montrer que si $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ appartiennent à différentes classes d'équivalences, alors

$$\exists N \text{ t.q } \forall m, n \geq N \text{ on a : } x_n > y \text{ soit } x_n < y_n.$$

Définition 2.0.5 *Un nombre réel est une classe d'équivalence d'une suite de Cauchy de nombres rationnels.*

Avec cette définition tout nombre rationnel

$$x = \frac{m}{n},$$

est associé à la classe d'équivalence contenant la suite de Cauchy triviale (stationnaire)

$$x, x, x, \ldots$$

Donc dans un sens, l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$ comprend tous les nombres rationnels .

Avec des définitions adaptées, nous pouvons traiter les nombres réels comme les nombres rationnels, nous pouvons additioner, soustraire, multiplier et diviser avec eux .

Proposition 2.0.2 *si* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sont des suites dans le sens de Cauchy alors :* $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}$ *sont des suites de Cauchy, et* $\{x_n/y_n\}$ *est une suite de Cauchy si* $(y_n) \neq (0)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve. (voir par exemple [6] p. 3) □

Proposition 2.0.3

1. *Soit* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de cauchy ne convergeant pas vers* 0. *Alors :*

$$\exists N_0 : \forall n > N_0 \text{ on a : } x_n \neq 0 \text{ et la suite } \frac{1}{x_n} \text{ définie pour } n > N_0 \text{ est de cauchy}$$

2. *Si la suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* a *et si la suite* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* b *alors, la suite* $\{x_n + y_n\}$ *tend vers* $a + b$, *la suite* $\{x_n - y_n\}$ *tend vers* $a - b$ *et* $\{x_n y_n\}$ *tend vers* ab.

Preuve. (voir par exemple [6] p. 4) □

Le fait que la suite (x_n) ne tend pas vers 0 se traduit par :

$$\exists \alpha \in \mathbb{Q} \ (\alpha > 0) \ \forall v \in \mathbb{N}; \exists n \in \mathbb{N} : n > v \text{ et } \mid x_n \mid \geq \alpha \tag{2.0.4}$$

La suite (x_n) étant de Cauchy, il existe un entier N_0 tel que les énégalités $n > N_0$ et $p > N_0$ entraînent

$$| x_n - x_p |< \frac{\alpha}{2}.$$

En prenant $v = N_0$ dans (2.0.4) on voit qu'il existe un entier n satisfaisant à la fois $n > N_0$ et $| x_n |\geq \alpha$.
Avec cette valeur de n, et pour tout entier $p > N_0$, on a :

$$\forall p, q > N_0, \text{on a} : | x_p |> \frac{\alpha}{2} \text{ et } | x_q |> \frac{\alpha}{2}.$$

D'où

$$| \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_p} |< \frac{4}{\alpha^2} | x_p - x_q |,$$

et puisque la suite (x_p) est de Cauchy, on en déduit que la suite $(\frac{1}{x_p})$,définit pour $p > N_0$, est aussi de Cauchy.

2.0.1 L'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}$

Sur l'ensemble C des suites de Cauchy, on définit la relation binaire $\sim$ par :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I.$$

La relation $\sim$ est bien compatible avec les opérations d'addition et multiplication sur S. En effet, si x, x', y et y' sont des suites de Cauchy, alors

$$x \sim x^{'} \text{ et } y \sim y^{'} \Rightarrow (x + y) \sim (x^{'} + y^{'}).$$

De même

$$x \sim x^{'} \text{ et } y \sim y^{'} \Rightarrow (xy) \sim (x^{'}y^{'}).$$

Par passage au quotient, ces opérations héritent des propriétés de commutativité, associativité et distributivité. C'est-à-dire que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif. De plus, le passage au quotient permet d'obtenir la structure de corps.

Théorème 2.0.1 $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps comutatif.*

Preuve. Remarquons d'abord que l'anneau $\mathbb{R}$ admet pour unité la classe u constituée par les suites de Cauchy convergeant vers 1.
Soit alors (x_n) une suite de Cauchy ne converge pas vers 0. D'après la proposition () nous savons que la suite $(\frac{1}{x_n})$ est définie pour n assez grand (soit $n > N_0$) et qu'elle est de Cauchy.
Si nous posons $y_n = 0$, pour $n \leq N_0$

$$y_n = \frac{1}{x_n}.$$

Pour $n > N_0$, nous obtenons une suite de Cauchy y_n telle que la suite $(x_n y_n)$ converge vers 1. On a donc

$$xy = u,$$

ce qui montre que tout élèment non nul x de $\mathbb{R}$ a un inverse dans $\mathbb{R}$. □

2.0.2 Existence de nombres irrationnels

considérons la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Pour $m > n$ on a

$$\begin{aligned} x_m - x_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Ce qui permet de trouver que x est une suite de Cauchy. En effet, pour tout rationnel

$$\varepsilon = \frac{p}{q} \ /(p, q \in \mathbb{N}^*),$$

Les inégalités $m > q$ et $n > q$ entraînent

$$\mid x_m - x_n \mid < \frac{1}{q \cdot q!} \leqslant \frac{p}{q}.$$

D'autre part, la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers un nombre rationnel

$$\frac{p}{q} \ /(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*).$$

Sinon, les inégalités précédemment établies

$$0 < x_m - x_n < \frac{1}{n \cdot n!},$$

qui sont valables pour tout $m > n$, entraîneraient à la limite(si $m \longrightarrow +\infty$) les inégalités

$$0 < \frac{p}{q} - x_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}. \tag{2.0.5}$$

La premiére inégalité

$$0 < \frac{p}{q} - x_n,$$

résultant du fait que la suite $\{x_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante).

Mais pour $n \geq q$ le nombre rationnel $(\frac{p}{q}) - x_n$ peut être représenter par une fraction de la forme $\frac{A}{n!}$, avec $A \in \mathbb{Z}$. Les inégalités (2.0.5) exigeraient donc

$$0 < A \leq \frac{1}{n}.$$

ce qui est impossible pour $n > 1$.

Le nombre réel e défini par la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas rationnel,on dit qu'il est irrationnel.

2.0.3 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Pour pouvoir ordonner $\mathbb{R}$ nous allons définir les ensembles C_+, C_-, constitués par les suites de Cauchy destinées à représenter respectivement les nombres réels positifs et les nombres réels négatifs.

Définition 2.0.6 *Un réel α est dit positif si et seulement si*

i) α est le réel nul, ou

ii) α possède un représentant x qui vérifie

$$\exists a \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq a.$$

L'ensemble des réels positifs est noté $\mathbb{R}_+$, On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ des réels positifs et non nuls, dits strictement positifs.

Théorème 2.0.2 *Soit α un réel strictement positif, alors*

$$\forall y \in \alpha, \exists N_y \ , \exists a \in \mathbb{Q}_+^* : \forall n \geq N_y \Longrightarrow y_n > 0.$$

Preuve. Soit donc α un réel strictement positif. Par définition de $\mathbb{R}_+^*$, il existe un représentant x de α, un rationnel a strictement positif est un entier N_0 tel que

$$\forall n \geq N_0, \quad \text{on ait} \quad x_n > a.$$

Soit $y \in \alpha$ un autre représentant du réel α. Alors la suite $(x - y) \in I$ (I est l'ensemble des suites de Cauchy qui converges ves zéro), donc

$$\exists N_1 / \quad \forall n \geq N_1 \text{ on ait } \mid y_n - x_n \mid < \frac{a}{2} \text{ et donc } y_n \geq x_n - \frac{a}{2}.$$

Pour $n \geq \max(N_0, N_1)$, on a alors

$$x_n \geq a \text{ et } y_n \geq x_n - \frac{a}{2}.$$

Donc

$$y_n \geq \frac{a}{2} > 0.$$

□

2.0.4 Propriétés

1. $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.
2. $\alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow -\alpha \in \mathbb{R}_-$.
3. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$.
4. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+$.
5. $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$.

Définition 2.0.7 *On définit la relation binaire $\leq$ sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Théorème 2.0.3 *$\leqslant$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive et c'est bien un ordre total. □

Proposition 2.0.4 *$\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soient α, β, γ et δ des réels vérifiant $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \delta$.Il est clair que si

$$\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \delta - \gamma \in \mathbb{R}_+,$$

alors,

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \delta.$$

et,

$$\beta\delta - \alpha\gamma = \beta(\delta - \gamma) + \gamma(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$$

□

2.1 Inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $\mathbb{R}'$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ définie par

$$\alpha \in \mathbb{R}' \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Q}, (k)_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha.$$

Théorème 2.1.1 $\mathbb{R}'$ *est un sous-corps de* $\mathbb{R}$.

Preuve. (voir [2]) □

2.2 Valeur absolue sur $\mathbb{R}$

Définition 2.2.1 *Prolongeant la définition de la valeur absolue sur $\mathbb{Q}$, on associe à tout réel α sa valeur absolue $\mid \alpha \mid$ par,*

$$\mid \alpha \mid = \max(\alpha, -\alpha).$$

Cette valeur absolue est bien définie, en effet nous avons montré que l'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné (et donc la famille $(\alpha, -\alpha)$ possède un plus grand élément).

Théorème 2.2.1 *Soit α un réel et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un de ses représentants. Alors la suite $\{\mid x_n \mid\}_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite de Cauchy, et est un représentant de $\mid \alpha \mid$.*

Preuve. On distingue trois cas :

i) $\alpha = 0$, et donc $(x)_{n\in\mathbb{N}} \in I$. Alors la suite de terme général $\mid x_n \mid$ converge également vers 0 comme dans ce cas $\mid \alpha \mid = 0$, c'est bien un représentant de $\mid \alpha \mid$.

ii) $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists a \in \mathbb{Q}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq \mathbb{N}, \quad a > 0.$$

Pour $n \geq n_0$, on a alors

$$\mid x_n \mid = x_n,$$

et donc la suite $\{\mid x_n \mid\}_{n\in\mathbb{N}}$ coïncide avec la suite $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang n_0. C'est donc également une suite de Cauchy, de la même classe d'équivalence que la suite $(x)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que c'est un représentant du réel $\alpha = \mid \alpha \mid$.

iii)$\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, de la même façon, à partir d'un certain rang on a

$$\mid x_n \mid = -x_n ,$$

et donc la suite $\{\mid x_n \mid\}_{n\in\mathbb{N}}$ coïncide avec la suite $(-x)_{n\in\mathbb{N}}$, elle est donc de Cauchy, représentant du réel $-\alpha = \mid \alpha \mid$. □

2.2.1 Propriétés

i)$\mid \alpha \mid = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

$(\Leftarrow)$ est immédiat d'après le premier point de la démonstration précédente.

$(\Rightarrow)$ Par contraposée, si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\mid \alpha \mid = \alpha \neq 0.$$

d'après le deuxième point, et si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, alors d'après le troisième point

$$\mid \alpha \mid = -\alpha.$$

donc

$$\mid \alpha \mid \in \mathbb{R}_+^*.$$

ii)$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mid \alpha + \beta \mid \leq \mid \alpha \mid + \mid \beta \mid$.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des représentants de α et β deux réels. D'après le théorème précédent, la suite $(\mid a_n + b_n \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ est un représentant de$\mid \alpha+\beta \mid$,tout comme les suites $(\mid a_n \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mid b_n \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des représentants des réels $\mid \alpha \mid$et$\mid \beta \mid$ respectivement. Or, d'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{Q}$, on sait que pour tout entier n, on a

$$\mid a_n + b_n \mid \leq \mid a_n \mid + \mid b_n \mid .$$

La suite $(\mid a_n \mid + \mid b_n \mid - \mid a_n + b_n \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc tous ses termes positifs, et donc

$$\mid \alpha+\beta \mid \leq \mid \alpha \mid + \mid \beta \mid .$$

iii)$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mid \alpha\beta \mid = \mid \alpha \mid \mid \beta \mid$.

Avec les mêmes notations, un représentant de $\mid \alpha\beta \mid$ est la suite$(\mid a_n b_n \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est-à-dire en utilisant la même propriété dans $\mathbb{Q}$, la suite $(\mid a_n \mid \mid b_n \mid)_{n\in\mathbb{N}}$, dans laquelle on reconnait l'expression du produit des deux suites de Cauchy $(\mid a_n \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mid b_n \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ d'où la propriété annoncée.

2.3 Topologie de $\mathbb{R}$

Nous terminons cette construction des nombres réels par des propriétés d'ordre topologique. Nous avons construit $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels. Nous allons voir ici qu'il ne servirait à rien de recommencer une telle construction en espérant obtenir d'autres nombres, ce qui n'aurait a priori rien d'absurde. En fait, toute suite de Cauchy de réels converge elle-même vers un réel, on exprime cette propriété en disant que l'ensemble $\mathbb{R}$ est complet.

Théorème 2.3.1 *: Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré possède une borne supérieur (un majorant, qui est le plus petit des majorants de la partie).*

Preuve. (voir [4]) □

Chapitre 3

Méthode de Dedekind

Dans le chapitre précédent, nous avons construit le corps des réels en utilisant comme point de départ les suites de Cauchy rationnels. Cette méthode est due historiquement à Cantor. Mais il existe une deuxième présentation classique, due à Dedekind, fondée sur la notion de "**coupure**" à l'intérieur de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 *On appelle nombre réel (ou plus simplement réel) tout sous ensemble α de $\mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\alpha \neq \emptyset$; $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
2. $\forall x \in \alpha, \forall y \in \mathbb{Q} \backslash \alpha$: $x < y$.
3. *α ne possède pas de plus grand élèment.*

Définition 3.1.2 *On appelle coupure dans les nombres rationnels une telle partition de $\mathbb{Q}$ en deux sous ensembles non vides (ici notés α et $\mathbb{Q} \backslash \alpha$) tels que tout élément de l'un soit inférieur à tout élément de l'autre.*

On note l'ensmble des nombres réels par $\mathbb{R}$.

Example 2 *soit $a \in \mathbb{Q}$; soit l'ensemble $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} / x < a\}$. Cet ensemble α vérifié bien les trois propriétés ci-dessus : c'est donc un réel.*

Example 3 *Soit l'ensemble* $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}_+ / x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_-$.$\alpha$ *vérifie clairement les propriétés* 1) *et* 2) *ci-dessus. Pour la* 3) , *raisonnons par l'absurde en supposant que* α *admet un plus grand élément* a.

On a $a > 0$ *et* $a^2 < 2$, *soit alors le rationnel*

$$b = \frac{a(a^2+6)}{3a^2+2}$$

donc

$$b - a = \frac{2a(2-a^2)}{3a^2+2} > 0$$

et

$$b^2 - 2 = \frac{a^2(a^2+6)^2 - 2(3a^2+2)^2}{(3a^2+2)^2} = \frac{a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 8}{(3a^2+2)^2} = \frac{(a^2-2)^3}{(3a^2+2)^2} < 0$$

on a obtenu un élément $b > a$ *dans* α, *ce qui contredit la définition de* a *comme plus grand élément de* α.

Remarque 3.1.1 *Notons tout de suite que ces deux exemples sont différents : montrons que l'exemple (3) n'est pas du type de l'exemple (2). Raisonnons par l'absurde et supposons que*

$$\alpha = \{x \in \mathbb{Q} / x < a\}$$

avec $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ *Comme* $a \notin \alpha$,*on a* $a^2 \geq 2$.

Reprenons le nombre

$$b = \frac{a(a^2+6)}{3a^2+2}.$$

Le calcul précédent montre ici que $b - a \leq 0$, *donc* $b \leq a$,*et que* $b^2 - 2 \geq 0$ *donc* $b^2 \geq 2$ *donc* $b \geq a$; *finalement donc* $b = a$, *d'où*

$$a = \frac{a(a^2+6)}{3a^2+2},$$

d'où on déduit $a^2 = 2$.

On va noter provisoirement *réels du type* (1) les réels de type de l'exemple2, et *réels du type* (2) tous les autres réels. Une fois notre construction terminée, les premiers seront les rationnels et les seconds les irrationnels .

Proposition 3.1.1 *L'inclusion est une relation d'ordre total sur* $\mathbb{R}$.

Preuve. (voir [4]) □

3.2 Le groupe $(\mathbb{R}, +)$

3.2.1 Définition d'une addition sur $\mathbb{R}$

Définition 3.2.1 *Soient α et β sont deux réels, alors la somme de deux réels se définit de la manière suivante*

$$\alpha + \beta = \{z \in \mathbb{Q} / \exists x \in \alpha ; \exists y \in \beta : z = x + y\}.$$

Cette définition associe à tout couple de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ un troisième sous-ensemble dit **somme** des deux premiers. Pour affirmer que l'on a défini ainsi une addition sur $\mathbb{R}$ il faut montrer que $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ et puisque les trois propriétés de la definition (3.1.1) sont vérifiées alors $\alpha + \beta$ est bien un réel.

3.2.2 Propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$

Les preuves des propriètès suivantes peuvent être consulté par exemple dans [4].

Commutativité Elle résulte de la commutativité de l'addition sur $\mathbb{Q}$.

Associativité Elle résulte de la l'associativité de l'addition sur $\mathbb{Q}$.

Elément neutre $\varepsilon = \mathbb{Q}_-^*$ est un élèment neutre, (i,e)

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha + \varepsilon = \alpha.$$

Tout élément admet un opposé

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \alpha + \alpha' = \varepsilon.$$

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

on notera $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ (différence des réels α et β)

3.2.3 Nombres réels positifs et négatifs

Définition 3.2.2 *Un réel α est dit strictement positif si et seulement si $0 \in \alpha$ et leur ensemble sera noté $\mathbb{R}_+^*$.*

Un réel α est dit strictement négatif si et seulement si $-\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; leur ensemble sera noté $\mathbb{R}_-^*$.

Proposition 3.2.1 *1.* $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = \emptyset$.

2. $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \cup \{\varepsilon\}$ *(avec* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$*).*

(a) $[\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $\beta \in \mathbb{R}_+] \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_+ \left(\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^* \cup \{\varepsilon\}\right)$.

(b) $[\alpha \in \mathbb{R}_-$ *et* $\beta \in \mathbb{R}_-] \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_- \left(\mathbb{R}_- = \mathbb{R}_-^* \cup \{\varepsilon\}\right)$.

3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \subset \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. (voir [4]) □

3.3 Le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$

Définition de la multiplication sur $\mathbb{R}$

Définition 3.3.1 *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, *on pose*

$$\alpha \times \beta = \{z \in \mathbb{Q} \;/\; \exists x \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+^*, \quad \exists y \in \beta \cap \mathbb{Q}_+^*\} \cup \mathbb{Q}_-.$$

On note aussi cette opération $\alpha \cdot \beta$ ou $\alpha\beta$.

Cette quantité définie bien un réel, puisqu'elle verifie les trois propriétés de la définition d'un réel.

Propriétés de la multiplication sur $\mathbb{R}$:

Les preuves des propriètès suivantes peuvent être consulté par exemple dans [4]

Commutativité :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R} : \alpha\beta = \beta\alpha.$$

.

Associativité :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall \gamma \in \mathbb{R} : (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Distributivité sur l'addition :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Tout élément admet un inverse

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}^*,\ \exists\alpha',\ /\ \alpha\alpha' = \varepsilon_1$$

On déduit de ces propriétés que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.
: On notera $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \times \frac{1}{\beta}$ (quotient du réel α par le réel non nul β).

3.4 Inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

Soit $\mathbb{R}'$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des réels du type 1.

Théorème 3.4.1 $\mathbb{R}'$ *est un sous-corps du corps des réels.*

Preuve. (voir [4]) □

3.5 Prolongement à $\mathbb{R}$ de la relation $\leqslant$

3.5.1 Rappels

1. L'inclusion est un ordre totale sur $\mathbb{R}$
2. Et $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} : \alpha \subset \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$

Montrons que la relation $\subset$ sur $\mathbb{R}$ prolonge la relation $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} : a \subset b$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{R}_+ \\ &\Longleftrightarrow \quad a \leqslant b. \end{aligned}$$

Ce prolongement permet d'étendre la notation $\leqslant$ à $\mathbb{R}$ par

$$\alpha \leqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha \subset \beta.$$

Remarque 3.5.1

1. On a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$$0 \leq \alpha \Longleftrightarrow 0 \subset \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}_+$$
2. On a $\forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$,
$$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha \subset \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow 0 \leq \beta - \alpha$$
3. $\leqslant$ est compatible avec l'addition sur $\mathbb{R}$,
$$[\alpha \leq \beta \text{ et } \alpha_1 \leq \beta_1] \Longrightarrow \alpha + \alpha_1 \leq \beta + \beta_1.$$
4. $\leqslant$ est compatible avec la multiplicationt sur $\mathbb{R}$
$$0 \leq \alpha \leq \beta \text{ et } 0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \Longrightarrow \alpha\alpha_1 \leq \beta\beta_1.$$

Toutes ces propriétés confèrent à $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ une structure de corps totalement ordonné.

3.5.2 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 3.5.1 *Si α et β sont deux réels tels que $\alpha < \beta$, il existe un rationnel r tel que $\alpha < r < \beta$ (on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)*

Preuve. (voir [4]) □

3.5.3 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

La borne **supérieur** et **l'inférieur** étant très importantes en analyse, on rappellera d'abord leurs définitions dans le cas de $\mathbb{R}$.

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que E est majorée (resp minorée) s'il existe un nombre M (resp m) tel que
$$\forall x \in E : x \leqslant M \quad (\textit{resp } x \leqslant m),$$
et on dit que M est un majorant de E (resp m est un minorant de E).

Une partie non vide de $E \subset \mathbb{R}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Soit $E \subset \mathbb{R}$ une partie majorée. Alors

$$M_0 = \sup\ E \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall x \in E:\ x \leq M_0 \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0; \exists x \in E : M_0 - \varepsilon < x. \end{array} \right\}.$$

Cette équivalence est évidente puisque le second membre de cette relation exprime exactement le fait que M_0 est un majorant de E d'une part, et d'autre part, que M_0 est le plus petit des majorants.

Si E n'est pas majorée, on écrit $\sup E = +\infty$.

De même, si E est une partie minorée de $\mathbb{R}$, alors

$$m_0 = \sup\ E \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall x \in E:\ x \geq m_0 \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0; \exists x \in E : m_0 + \varepsilon \geq x. \end{array} \right\}$$

Si E n'est pas minorée, on écrit $\inf E = -\infty$.

Théorème 3.5.2 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et majoré (i.e il existe un majorant de E, réel supérieur ou égale à tous les élément de E). Alors : l'ensemble des majorants de E admet un plus petit élément, nomme borne supérieure de E.*

Preuve. (voir[5]) $\square$

Chapitre 4

Conclusion

Les nombres réels sont intéressants dans tous les domaines par exemple, dans le domaine mathématique, on les utilise pour étudier la convergence des séries et résoudre certaines équations linéaires et non linéaires de plus ils sont utilisés pour calculer les distances.
Dans ce travail, nous avons exposé deux aspects essentiels de la construction de ces nombres.

1. Le premier, que nous avons intitulé "méthode de Cauchy", s'appuit sur un exemple concret "la résolution de l'équation $x^2 = 2$ dans l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$, à partir duquel et du problème rencontré de sa solution qui ne peut être un rationnel. Cette méthode a permis le fondement de la fameuse **théorie des suites de Cauchy** et à priori celle de **la convergence d'une suite de nombres**.
2. Le second, intitulé "méthode de Dedkind", nous a permis, par exemple, l'étude des propriétés des lois de composition sur $\mathbb{R}$. Il permet aussi un accès plus direct à certaines propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$.

Cette construction des réels se révele aussi par un argument analytique crucial qu'est la completion. Ceci se traduit par le fait que $\mathbb{R}$ est complet. Cet aspect de completion ou de complétude trouvera des généralisations pour certains espaces fonctionnels. Le plus fondamental étant l'espace des atomes $L^2\left([a,b]\right)$qui est complet pour la 2-norme par construction.

Bibliographie

[1] Benchata Abdellah www.mathématiques.fr.st

[2] N. H Bouzara, Constructions des nombres réels, Exposé en classe, Master1 Analyse Fonctionnelle, 2009-2010.

[3] Corina Reischer,Réal Gélinas et André paradis-Nombres finis et nombres transfinis,presses de l'université du Québec.

[4] Jean Gounon http ://dma.ens.fr/culturemath.

[5] Kada Allab Elément d'analyse, fonction d'une varaible réelle,1e et 2e année d'université,école scientifique.

[6] Lelong Ferrond et J-M-Arnaudés-Cours de mathématique tome 2-Analyse,4e édition, Dunod université.