Ministère de l'Enseignement
Supérieur
et de la Recherche
Scientifique

ECOLE NORMALE SUPERIEURE Vieux-Kouba (ALGER)

Département de Math

وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة
- القبة القديمة(الجـزائـر)

قسم الرياضيات

مذكـــرة لنيل شهادة أستــــاذ التعليم الثانـــوي

الفضاءات الشعاعية الطبولوجية

تعاريف وخواص

إعـــداد:
- ميرة تلامعلي
- *سامية أولاد الحاج إبراهيم*

تحـت إشراف الأستاذ:
- أبو بكر خالد سعد الله

لجنة المناقشة:

الأستاذ:	محمود بوالصلصال	رئيساً
الأستاذ:	أبو بكر خالد سعد الله	مشرفا
الأستاذ:	الحسن وعزاز	ممتحنا

نوقشت يوم: 24 جوان 2004

السنة الدراسية: 2004\2003

(دفعة جوان)

الفهرس

بسم الله الرحيم الرحيم

المقدمة

لقد حاولنا في بحثنا هذا الذي يدور موضوعه حول الفضاءات الشعاعية الطبولوجية أن نجمع أهم التعاريف والخصائص التي يحتاجها أي طالب بوده دراسة المبادئ العامة للتحليل التابعي.

هذا البحث مقسم إلى خمسة محاور، المحور الأول أردناه تذكيرا لبعض المفاهيم العامة في الفضاءات الشعاعية والفضاءات الطبولوجية وأتممناه ببعض التعاريف الجديدة علينا والتي هي متداولة عند دراسة الفضاءات الشعاعية الطبولوجية. أما الفصل الثاني فجعلناه تمهيدا لتعريف الفضاء الشعاعي الطبولوجي وقدمنا فيه بعض الخصائص الأولية في مثل هذه الفضاءات.

كذلك تحدثنا في الفصل الثاني عن الجمل الأساسية لجوارات الصفر وما تتمتع به من خصائص في الفضاءات الشعاعية الطبولوجية لما لها من أهمية كبيرة في مثل هذه الفضاءات،إذ من خلالها نستطيع تعريف نوع مهم من الفضاءات التي تلعب دورا مهما في التحليل التابعي وهي الفضاءات المحدبة محليا،.التي ستكون موضوع الفصل الرابع.
الفصل الثالث من هذا البحث خصصناه لتعريف المجموعات المحدودة في الـ ف ش ط وإعطاء بعض الخصائص التي تتمتع بها.

أما الفصل الخامس فإننا نقدم من خلاله بعض الأمثلة التقليدية لهذه الفضاءات، وقد وضعنا كذلك دليلا للمصطلحات المعربة والمستعملة أثناء البحث تسهيلا لفهمها وتوحيدا لها.

وفي الأخير بودنا أن نثمن أهمية إختيار طبولوجيا منسجمة على فضاء شعاعي E لمجموعة توابع، حيث تمكن من إستعمال كل المفاهيم والتعاريف والنتائج الموجودة في نظرية الفضاءات الشعاعية الطبولوجية، كما تجدر الإشارة إلى أن الفضاءات الشعاعية المزودة بـP-**طبولوجيا** غالبا ما يشار لها باسم الفضاءات المحدبة محليا،لأنه في مثل هذه الفضاءات النقطة o تتمتع بأساس من الجوارات المحدبة، وكذلك يمكن أن نثبت بصورة

عكسية أن طبولوجية كل فضاء شعاعي طبولوجي تتمتع بالخاصية الأخيرةهي من نوع P -طبولوجيا.

نشير كذلك الى وجود فضاءات شعاعية طبولوجية بحيث تكون طبولوجيتها ليست من نوع P-طبولوجيا لكن مثل هذه الفضاءات لم تلعب أي دور لحد الأن على ما يبدو. بالفعل، فمن جهة لدينا الصنفP-طبولوجيا يلبي العديد من إحتياجات المختصين في التحليل ومن جهة ثانية، تعتبر الصنف الوحيد المعروف من الفضاءات الشعاعية الطبولوجية والذي من أجله نعرف كيفية تأسيس نظريات مفيدة وعملية.

وأخر الكلام هو ثناء لله سبحانه وتعالى لأن وفقنا والحمد لله في مشوارنا الدراسي وجعلنا نحس بنعمه علينا فنقول اللهم لك الحمد كما ينبغي لجلال وجهك وعظيم سلطانك .

و السلام عليكم .

Introduction

Le thème de ce mémoire étant les espaces vectoriels topologiques , nous avons tenté de présenter les principales définitions et propriétés se rapportant à ces espaces.

Ce travail comprend cinq chapitres , chacun d'eux est composé de plusieurs sections .
Nous avons consacré le premier chapitre à des rappels et compléments relatifs aux espaces vectoriels topologiques.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la définition de l'espace vectoriel topologique (e.v.t.) et quelques propriétés immédiates s'y rapportant.
De même que nous avons parlé dans ce même chapitre des voisinages de O dans les e.v.t qui ont une grande importance dans ce genre d'espaces car ils permettent en particulier de définir un important type d'espaces ayant un rôle primordial en l'analyse fonctionnelle à savoir: les espaces localement convexes, qui sont l'objet de notre quatrième chapitre.

Par contre, le troisiéme chapitre parle des ensembles borné dans les espaces vectoriels topologique.

Quant au dernier chapitre, nous avons choisi d'exposer quelques exemples classiques des e.v.t, suivis d'un lexique regroupant les termes utilisés dans ce mémoire.

Enfin, notons que l'importance du choix d'une topologie compatible avec l'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions, permet d'utiliser les notions et les résultats existant dans la théorie e.v.t.
Il convient de remarquer aussi l'existence d'e.v.t dont la topologie n'est pas du type P-Topologie (*). Ils jouent jusqu'à présent un rôle minime en analyse.

En conclusion , nous louons Dieu , tout puissant de nous avoir assistés tout au long de notre cursus scolaire sans oublier de souligner le mérite de nos éminents professeurs qui n' ont ménagé aucun effort afin de nous transmettre leur savoir et leur richesse intellectuelle et morale durant cinq années de persévérance à l' ENS de KOUBA .

(*) Nous avons parlé de ce type de topologie dans le quatrième chapitre de ce mémoire .

Introduction:

In this modest work,we have attempted to treat the topological vector spaces and collected the famous definition, and the general features that concerned the hypothesis of the topological vector spaces.

This work is devided into five chapters:

Chapter 01: We have dealt with the reviews of the vector spaces and the topological spaces.

Chapter 02: We have presented the definition of the topological vector spaces, and the direct features that we've deduced them from the definition. In addition to this, we have dealt with the fundamental systems of the neighborings of O.

Chapter 03: we have presented the definition and the characterstics of the borended sits

.

Chapter 04:we hve tackled with the convex local spaces.

Chapter 05: We have introduced some classical examples about the topological vector spaces.

ملاحظة :

نتفق على الرموز التالية:

(ن أ-ف ب): نظرية رقم أ من الفصل رقم ب.

(خ أ-ف ب): خاصية رقم أ من الفصل رقم ب.

(قأ-ف ب): قضية رقم أ من الفصل رقم ب.

O: نرمزللعنصر الصفري في ف ش ط.

0 : يدل على العنصر الصفري في الحقل.

الفصل الاول

تذكيرات وتتمات

1- الفضاء الشعاعي:

تعريف 1:

ليكن K حقلا تبديليا، E مجموعة غير خالية مزودة بالعمليتين التاليتين:

1-عملية الجمع (+): من أجل كل زوج (x,y) المشكل من العنصرين x و y من E نرفق عنصرا $x+y$ من E يدعى مجموع x و y.

2-عملية الضرب (.): من أجل كل عنصر x من E وكل سلمية λ من K نرفق عنصرا λx من E ندعوه جداء السلمية λ بـ x.

نقول إن المجموعة E فضاء شعاعي على الحقل K إذا كانت العمليتان المعرفتان على E تحققان الخواص التالية:

مهما تكن العناصر $x,y,z\in E$ والسلميات $\lambda,\mu\in K$:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$
2. $x+y=y+x$
3. يوجد عنصر من E نرمز له بـ O بحيث: $x+O=x$
4. من أجل كل $x\in E$ يوجد عنصر من E، نرمز له بـ $(-x)$ بحيث: $x+(-x)=O$
5. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
6. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu y$

7. $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$

8. $1.x=x$: "1" هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الثانية.

بعض النتائج:

- من أجل $x_i \in E$ و $\lambda_i \in K$: $i=1,2,...,n$ فــإنَ $\sum_i \lambda_i x_i \in E$.

إذا كان V_1 و V_2 جزءين من الفضاء الشعاعي E فإنَ V_1+V_2 هي مجموعة العناصر من الشكل $x+y$ حيث: $x\in V_1$ و $y\in V_2$.

- $x+V_1$ هي مجموعة العناصر من الشكل $x+y$ حيث: $y\in V_1$.

- λV_1 هي مجموعة العناصر من الشكل λx حيث: $x\in V_1$.

فيما سيأتي سوف نتفق على أن الحقل K يشير إلى R أو C.

تعاريف:

I. نقول عن جزء V من فضاء شعاعي E على K إنَه:

- **فضاء شعاعي جزئي**: إذا كان من أجل كل $x,y\in V$ و $\alpha;\beta\in K$ فإنَ $\alpha x+\beta y\in V$.
- **محدب**: إذا كان من أجل كل $x,y\in V$ وكل $\lambda\in[0,1]$ فإنَ $\lambda x+(1-\lambda)y\in V$ أيَ أنَ: $\lambda V+(1-\lambda)V\subset V$ حيث $\lambda\in[0,1]$.
- **متوازن**: إذا كان من أجل كلّ $x\in V$ وكل $\lambda\in K$: $|\lambda|\leq 1$ نجد $\lambda x\in V$. وهو مكافئ للقول أن $\lambda V\subset V$ حيث $|\lambda|\leq 1$.
- **متناظر**: إذا كان من أجل كلّ $x\in V$ فإنَ $(-x)\in V$. وهو مكافئ للقول أنَ $-V=V$.
- **ماص**: إذا كان من أجل كل $x\in E$، يوجد $k>0$ بحيث يكون $\lambda x\in V$ من أجل $|\lambda|\leq k$.

II. ليكن A جزء غير خال من فضاء شعاعي E على K:

- نسمي غلافا متوازنا (على التوالي محدبا) لـ A، تقاطع كلّ المجموعات المتوازنة (على التوالي المحدبة) التي تحوي A.

- نسمي غلافا محدبا متوازنا لـ A، تقاطع كلّ المجموعات التي تحوي A والتي هي محدبة ومتوازنة.

- نسمي غلافا متوازنا (على التوالي محدبا، محدبا متوازنا) لـ A، أصغر مجموعة متوازنة (على التوالي محدبة، محدبة متوازنة) التي تحوي A.

- الغلاف المتوازن لـ A هو مجموعة العناصر λx من E حيث x نقتصره على A

و λ نقتصره على مجموعة الأعداد العقدية والتي تحقق $|\lambda|\leq 1$.

إذن يمكن القول إن الغلاف المتوازن لـ A هو اتحاد المجموعات λA حيث $|\lambda|\leq 1$.

III. نقول عن جزء C من فضاء شعاعي E إنه مخروط رأسه المبدأ ($Cône\ de\ sommet\ l'origine$) إذا كان مستقرا بواسطة التحاكيات ذات النسب $\lambda > 0$.

IV. عندما يكون $x\in E$،يدعى $x+C$ مخروطا رأسه x.

ليكن E فضاء شعاعيا، نقول عن تابع P حقيقي معرف على E إنّه:

- **تحت جمعي**: إذا كان من أجل كلّ زوج كيفي من العناصر x_1,x_2 من E نجده يحقق: $P(x+y)\leq P(x)+P(y)$.

- **متجانس موجبا**: إذا كان من أجل كلّ $\lambda\geq 0$: $P(\lambda x)=\lambda P(x)$.

- **متجانس**: إذا كان من أجل كلّ $\lambda\in K$ يكون $P(\lambda x)=|\lambda| P(x)$.

خواص مباشرة:

1. لتكن V مجموعة متوازنة، إذن $\lambda V=|\lambda| V$ و $|\lambda|\leq|\mu|\Rightarrow \lambda V\subset \mu V$

2. كلّ جزء متوازن هو متناظر.

3. حتّى يكون جزء متوازن V ماصا يكفي أن يكون من أجل كلّ $x\in E$ يوجد $k\in K$ $(k\neq 0)$ بحيث $kx\in V$.

4. التقاطع المنتهي لمجموعات ماصة هو ماص.

5. تقاطع مجموعات متوازنة هو متوازن.

6. تقاطع محدبات هو محدب.

قضية 1:

لتكن A مجموعة محدبة من الفضاء الشعاعي E على K و $x_1, x_2, ..., x_n$ متتالية منتهية كيفية من نقاط A.

مهما تكن الأعداد الحقيقية $\lambda_i \geq 0$ بحيث: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ يكون لدينا $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$.

إثبات:

نثبت ذلك بالتراجع على عدد نقاط المتتالية.

من أجل كلّ متتالية مقتصرة على نقطتين فإن القضية صحيحة إذ أنّها تنتج مباشرة من تعريف المجموعة المحدبة.

نفرض أن القضية صحيحة من أجل كلّ متتالية منتهية ذات $n-1$ نقطة ونثبت أن $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$.

نضع $\mu = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$ لدينا: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu} = 1$ إذن $y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i \in A$ (من فرض التراجع)، بماأن A محدبة فإن $\mu y + (1-\mu) x_n \in A$. (وهو المطلوب)

قضية 2:

إذا كانت A و B مجموعتين محدبتين في الفضاء الشعاعي E على K فإن $A+B$ محدبة كذلك.

إثبات:

ليكن $z_1,z_2\in A+B$، لدينا: $z_1=x_1+y_1$ ، $z_2=x_2+y_2$ مع $x_1,x_2\in A$ و $y_1,y_2\in B$.

إذن: $\lambda z_1+(1-\lambda)z_2=\underbrace{(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)}_{I}+\underbrace{(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)}_{II}$

غير أنّه إذا كان $\lambda\in[0,1]$ فإن $I\in A$ و $II\in B$ وهذا ما يجعل $\lambda z_1+(1-\lambda)z_2\in A+B$، وهذا ينهي الإثبات.

قضية 3:

إذا كان A جزء محدبا من فضاء شعاعي E على K. وإذا كان $\alpha\geq 0$، $\beta\geq 0$ فإن $\alpha A+\beta A=(\alpha+\beta)A$.

إثبات:

ليكن $x\in\alpha A+\beta B$، إذن $x=\alpha y+\beta z$: $y,z\in A$.

إذن: $x=(\alpha+\beta)\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y+\frac{\beta}{\alpha+\beta}z\right]\in(\alpha+\beta)A$ لأن A محدبة.

عكسيا: إذا كان $x\in(\alpha+\beta)A$ فإن $x=(\alpha+\beta)y$ مع $y\in A$، إذن $x=\underbrace{\alpha y}_{\in\alpha A}+\underbrace{\beta y}_{\in\beta A}$. (وهذا ينهي البرهان)

قضية 4:

لتكن $(A_i)_{i\in I}$ عائلة من الأجزاء المحدبة لفضاء شعاعي E .

الغلاف المحدب لاتحاد الـ A_i يطابق مجموعة الأمزجة الخطية $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ حيث $x_i\in A_i$ و $\lambda_i\geq 0$ من أجل كل $i\in I$ و $\lambda_i=0$ إلاّ من أجل عدد منته من الأدلة و $\sum_{i\in I}\lambda_i=1$.

إثبات:

الغلاف المحدب لاتحاد A_i يحوي B مجموعة أمزاجه الخطية وهذا بالنظر إلى (ق1-ف1)، إذن يكفي أن نثبت أن B مجموعة محدبة.

لتكن $x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ و $Y=\sum_{i\in I}\mu_i y_i$ نقطتين من B.

نثبت أن $\alpha x+(1-\alpha)y\in B$ من أجل كلّ $\alpha\in[0,1]$.

نضع $\alpha_i=\alpha\lambda_i+(1-\alpha)\mu_i$، لدينا $\alpha_i\geq 0$ و $\alpha_i=0$ إلاّ من أجل عدد منته من الأدلة و$\sum_{i\in I}\alpha_i=1$.

من أجل $\alpha_i>0$ لدينا: $\frac{\alpha\lambda_i}{\alpha_i}+\frac{(1-\alpha)\mu_i}{\alpha_i}=1$، إذن من أجل هذه الأدلة لدينا: $z_i=\frac{\alpha\lambda_i}{\alpha_i}x_i+\frac{(1-\alpha)\mu_i}{\alpha_i}y_i\in A_i$ لأن A_i محدبة.

إذن : $\alpha x+(1-\alpha)y=\sum_{i\in I}\alpha_i\left(\frac{\alpha\lambda_i}{\alpha_i}x_i+\frac{(1-\alpha)\mu_i}{\alpha_i}y_i\right)=\sum_{i\in I}\alpha_i z_i\in B$ وهو المطلوب.

نتيجة:

الغلاف المحدب لجزء A من فضاء شعاعي E يطابق مجموعة الأمزجة الخطية $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ حيث $(x_i)_{i\in I}$ عائلة منتهية كيفية من نقاط A و $\lambda_i\geq 0$ و $\sum_{i\in I}\lambda_i=1$.

لملاحظة ذلك يكفي تطبيق القضية السابقة على العائلة $\{x\}_{x\in A}$ حيث أن المجموعة $\{x\}$ ذات العنصر الوحيد x محدبة.

قضية 5:

في فضاء شعاعي E الغلاف المحدب لمجموعة متوازنة متوازن.

إثبات:

ليكن B الغلاف المحدب لمجموعة متوازنة A.

إذا كان $z\in B$ نثبت أن $\lambda z\in B$ إذا كان $|\lambda|\leq 1$.

من النتيجة الأخيرة توجد نقاط x_i من A $(i=1,2,...,n)$ بحيث $z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ مع $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

لدينا: $\lambda z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\lambda x_i)\in B$ لأن $\lambda x_i\in A$ من أجل $i=1,2,...,n$ و $|\lambda|\leq 1$.

قضية 6:

الغلاف المحدب المتوازن لجزء A من فضاء شعاعي E على K يطابق مجموعة الأمزجة الخطية $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ حيث $(x_i)_{i\in I}$ عائلة منتهية كيفية من نقاط A والعوامل $\lambda_i\in C$ تحقق $\sum_{i\in I}|\lambda_i|\leq 1$.

قضية 7:

الغلاف المحدب المتوازن لجزء A من فضاء شعاعي E على C يطابق الغلاف المحدب للغلاف المتوازن لـ A.

إثبات:

ليكن A^c (على التوالي A^e) الغلاف المحدب (على التوالي المتوازن) لـ A، وليكن A^* الغلاف المحدب المتوازن لـ A.

علينا إذن أن نثبت أن: $A^*=\left(A^e\right)^c$.

بالنظر إلى (ق5-ف1) نجد أن $\left(A^e\right)^c$ متوازن، (وطبعا هو محدب) إذن $A^*\subset\left(A^e\right)^c$.

نثبت الآن الاحتواء العكسي: ليكن $x \in \left(A^e\right)^c$، إذن: $x=\sum_i \lambda_i z_i$ مع $z_i \in A^e$، $\lambda_i \geq 0$ و$\sum_i \lambda_i=1$، ومن جهة أخرى $z_i=\mu_i y_i$ مع $y_i \in A$ و $\mu_i \in K$ بحيث $|\mu_i| \leq 1$، ومنه: $x=\sum \lambda_i \mu_i y_i$، ولمّا كان $\sum_i \lambda_i |\mu_i| \leq 1$ فإننا نحصل على أن $x \in A^*$، وهذا بالنظر إلى (ق6-ف1).

الفصل الرابع
الفضاءات المحدبة محليا

1 - تعريف و خواص عامة:

تعريف 1:

نقول عن فضاء شعاعي طبولوجي E أنه محدب محليا إذا كان يقبل جملة أساسية من الجوارات المحدبة لـ O.

سنسرد حاليا بعض الخصائص المهمة حول الفضاءات المحدبة محليا.

خاصية 1:

كل فضاء محدب محليا يقبل جملة أساسية من جوارات الصفر المحدبة، المتوازنة، المفتوحة والماصة.

إثبات:

يكفي إثبات أن كل جوار محدب V لـ O يحوي جوارا لـ O مفتوحا، محدبا ومتوازنا.

من (خ17-ف2) لدينا V يحوي جوارا W لـ O مفتوحا ومتوازنا.

الغلاف المحدب لـ W هو جوار مفتوح لـ O (خ8-ف2) ومتوازن (ق5-ف2).

بماأن $W \subset V$ فإن الغلاف المحدب لـ W محتوى في V ويحقق المطلوب، وهذا بعدما نذكر أن كل جوار لـ O في فضاء شعاعي طبولوجي هو ماص.

خاصية 2:

كل فضاء محدب محليا يقبل جملة أساسية من جوارات O محدبة، متوازنة، مغلقة وماصة.

إثبات:

يكفي أخذ مجموعة ملاصقات جوارات O من الجملة الأساسية الموجودة في (خ1-ف2) وتطبيق (خ6-ف2) و(خ7-ف2).

2- أنصاف النظيمات:

تعريف 2:

ليكن E فضاءً شعاعيا على الحقل K.

نسمي نصف نظيما على E كل تطبيق P من E نحو R يحقق الشروط التالية:

ش1- $P(x)\geq 0$ من أجل كل $x\in E$.

ش2- $P(\lambda x)=|\lambda|P(x)$ من أجل كل $x\in E$ وكل $\lambda\in K$.

ش3- $P(x+y)\leq P(x)+P(y)$ من أجل كل $x,y\in E$.

ونقول أن P نظيم إذا حقق بالإضافة إلى الشروط السابقة الشرط التالي:

$P(x)\neq 0$ من أجل كل $x\neq 0$. ونرمز عادة لـ $P(x)$ بـ $\|x\|$.

مثال:

إذا كانت f شكلا خطيا على E فإن $|f|$ نصف نظيم على E.

إذ أنه لدينا: $|f|\geq 0$، $|f(\lambda x)|=|\lambda f(x)|=|\lambda|\,|f(x)|$، $|f(x+y)|=|f(x)+f(y)|\leq|f(x)|+|f(y)|$.

وحتى يكون هذا النصف النظيم نظيما يلزم ألاّ تنعدم f إلا من أجل $x=0$، إذن يجب أن يكون بعد E مساويا لـ 1، وعكسيا إذا كان $\dim E=1$ و $f\neq 0$ فإن $|f|$ تصبح نظيما.

خواص:

1- من أجل كل نصف نظيم P على E، $P(O)=0$.

2- كل نصف نظيم P على E (حيث: E فضاء شعاعي على C) هو كذلك نصف نظيم على E مع إعتبار E فضاءً شعاعيا على الحقل R.

3- P محدبة ومتجانسة موجبا.

4- كل نصف نظيم P يحقق: $|P(x)-P(y)|\leq P(x-y)$.

بالفعل: فمن تحت جمعية P نجد: $P(x)=P(x-y+y)\leq P(x-y)+P(y)$ إذن: $P(x)-P(y)\leq P(x-y)$.

ولما كان $P(x-y)=P(y-x)$ نحصل على أن: $P(y)-P(x)\leq P(y-x)=P(x-y)$، ومنه المطلوب.

5- كل مزج خطي موجب (أي ذو معاملات موجبة) لأنصاف نظيمات هو كذلك نصف نظيم، وبصورة خاصة كل مجموع منته لنظيمات يعرف نظيما.

مثال:

في C^n التطبيق: (المركبة x_i) $x\to$ هو شكل خطي، إذن $|x_i|$ هو نصف نظيم، إذن الأمر هو كذلك من أجل $\sum_i |x_i|$. وبما أن هذا الأخير لا ينعدم إلا من أجل $x=0$ إذن هو يعرف نظيما.

6- كل نهاية منتهية لأنصاف نظيمات هي نصف نظيم.

7- من أجل كل عائلة $(P_i)_i$ من أنصاف نظيمات، إذا كان حدها الأعلى P منتهيا فهو نصف نظيم.

بالفعل: واضح أن P يحقق الشرطان ش1، ش2 من (ت2-ف4) ومن جهة أخرى لدينا: من أجل كل i: $P_i(x+y)\le P_i(x)+P_i(y)\le P(x)+P(y)$ إذن: $P(x+y)=\sup_i P_i(x+y)\le P(x)+P(y)$ ومنه تحقق الشرط 3 من (ت2-ف4).

مثال:

ليكن $B(A,K)$ الفضاء الشعاعي الذي عناصره التطبيقات المحدودة من المجموعة A نحو K.

من أجل كل $a\in A$ التطبيق $f\to f(a)$ من $B(A,K)$ نحو K هو خطي، إذن مما سبق: التطبيق $P_a : f\to|f(a)|$ هو نصف نظيم.

ليكن X جزءا غير خال كيفي من A، بما أن كل $f\in B(A,K)$ هي محدودة فإن التابع $\sup_{a\in X} P_a$ منته، إذن هو نصف نظيم وندعوه نصف نظيم التقارب المنتظم على X.

8- ليكن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K، وφ تطبيقا خطيا من E نحو F و P نصف نظيم على F. لدينا: $p\circ\varphi$ هو نصف نظيم على E.

مثال:

ليكن F_1,F_2 فضاءين شعاعيين على K وP_1 نصف نظيم على F_1، إذن التابع: $(x_1,x_2)\to P_1(x_1)$ المعرف على $F_1\times F_2$ هو نصف نظيم.

9- ليكن $(P_1,\dots,P_n)$ متتالية منتهية لأنصاف نظيمات على الفضاء الشعاعي E، وليكن φ تطبيقا متزايدا، محدبا ومتجانس موجبا من R_+^n نحو R_+. إن التابع $\varphi(P_1,\dots\dots,P_n)$ هو نصف نظيم على E.

بالفعل: سوف نتأكد من الشروط الموجودة في (ت2-ف4).

ش1: واضح.

ش2: ينتج من كون φ متجانس موجبا.

ش3: ينتج من تزايد وتحت جمعية φ.

تعريف الفوارق:

نسمي فارقا على مجموعة E كل تطبيق f من $E\times E$ نحو R_+ بحيث:

1- $f(x,y)=0 \quad \Rightarrow \quad x=y$.

2- $f(x,y)=f(y,x)$.

3- $f(x,y)\leq f(x,z)+f(z,y)$.

الاختلاف الموجود مع تعريف المسافة هو أن f يستطيع أخذ القيمة $+\infty$ وكذلك يمكن أن يكون الفارق معدوما بين نقطتين مختلفتين.

الفارق المرافق لنصف نظيم:

ليكن E فضاءً شعاعيا مزودا بنصف نظيم P .

من أجل كل x,y من E نضع $d(x,y)=P(x-y)$.

لدينا:

1- واضح أن $d(x,x)=0$ و $d(x,y)\geq 0$.

2- $d(x,y)=d(y,x)$ (لأن $P(x-y)=P(y-x)$).

3- $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ لأن $P(x-y)\leq P(x-z)+P(z-y)$.

هذه الخصائص الثلاث تثبت أن d فارقا على E .

كذلك يمكن ملاحظة أن d لا متغيرة بالنسبة للإنسحابات وأنها منتهية، ولكي تصبح مسافة يكفي إذن أن يكون: $P(x-y)=0 \Rightarrow x-y=0$ ؛ أي أن النصف النظيم P يصبح نظيما.

3- الطبولوجيا المرفقة لأنصاف نظيمات:

الكرات المرفقة لنصف نظيم:

نسمي P-كرة مفتوحة ذات مركز a ونصف قطر ρ (حيث $a\in E$ و $\rho>0$) المجموعة $B(a,\rho)$ من النقاط x من E بحيث: $d(a,x)<\rho$ ، ونعرف بنفس الطريقة الـ P-كرة مغلقة وذلك بتعويض الرمز"$<$" بـ "$\leq$". ونسمي P-كرة الوحدة: الكرة $B(O,1)$.

- واضح أن التمديد $x\to\alpha x+b$ يسحب الكرة $B(O,\rho)$ إلى $B(b,|\alpha|\rho)$ ، إذن نستطيع اقتصار الدراسة على الكرات ذات المركز O .

قضية 1:

1- كل P-كرة مفتوحة B ذات مركز O هي مجموعة محدبة، مستقرة بواسطة التقايسات $x\to\alpha x$ بحيث $|\alpha|=1$.

2- حتى يكون P نظيما يلزم ويكفي أن تكون الكرة $B(O,\rho)$ لا تحوي أي فضاء شعاعي جزئي ذا بعد مساو لـ 1

إثبات:

1- بماأن P محدب فإن المجموعة $B(O,\rho)$ المكونة من العناصر x التي تحقق $P(x)<\rho$ هي محدبة لأنه: من أجل x,y من $B(O,\rho)$ و α_1,α_2 من R^+ بحيث $\alpha_1+\alpha_2=1$ لدينا:

$P(\alpha_1x+\alpha_2y)\leq\alpha_1P(x)+\alpha_2P(y)\leq\underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{=1}\rho$ إذن: $P(\alpha_1x+\alpha_2y)\leq\rho$.

العلاقة: $P(\alpha x)=|\alpha|P(x)$ وكون $|\alpha|=1$ تجعل التحاكي $x\to\alpha x$ تقايس تقابلي من $B(O,\rho)$ نحو نفسه.

2- إذا وجد $a\neq O$ من E بحيث $P(a)=0$ فإننا نجد كل النقاط λa تنتمي إلى $B(O,\rho)$.

وعكسيا: إذا كانت $P(a)\neq0$ فإنه توجد λ بحيث: $\lambda a\notin B(O,\rho)$، على سبيل المثال $\lambda=\frac{2\rho}{P(a)}$

ملاحظة:

- نفس ما سبق يمكن تطبيقه على كرة مغلقة ذات نصف قطر $\rho>0$.
- الكرة المغلقة $B(O,0)$ هي فضاء شعاعي جزئي من E لا تقتصر على $\{O\}$ إلا إذا كان P نظيما.

الكرات المرفقة لعائلة من أنصاف النظيمات:

ليكن E فضاءً شعاعيا، وليكن $P=(P_i)_{i\in I}$ عائلة منتهية أو غير منتهية من أنصاف النظيمات على E. نرمز بـ $B_i(O,\rho)$ لـ P_i كرة مفتوحة ذات المركز a ونصف القطر ρ.

نسمي P-كرة مفتوحة ذات المركز a كل تقاطع منته من الـ P_i-كرات مفتوحة ذات المركز a، تقاطع P-كرتان مفتوحتان ذاتا المركز a هي أيضا P-كرة ذات مركز a.

ملاحظة:

في حالة اعتبار عناصر P هم المضاعفات λP (حيث $\lambda>0$) لنصف نظيم P، يمكن إثبات أنه لا يمكن التكلم عن نصف قطر الـ P-كرة.

الفصل الثاني

الفضاء الشعاعي الطبولوجي

1- طبولوجيا على فضاء شعاعي

تعريف 1:

ليكن الفضاء الشعاعي E على K (حيث K هو R أو C).

نقول عن طبولوجيا معرفة على E إنها منسجمة مع بنيته الشعاعية إذا كان التطبيقان التاليان:

$(x,y)\to x+y$ من $E\times E$ نحو E و $(\lambda,x)\to\lambda x$ من $K\times E$ نحو E مستمرين.

أي أنه:

1. من أجل كل عنصرين $x,y\in E$ وكل جوار V_{x+y} للعنصر $x+y$ يوجد جوار V_x لـ x وجوار V_y لـ y بحيث: $V_x+V_y\subset V_{x+y}$.
2. من أجل كل $x\in E$ وكل عدد $\lambda\in K$ وكل جوار $V_{\lambda x}$ يوجد جوار V_x لـ x وعدد $\delta>0$ بحيث من أجل كل μ يحقق: $|\mu-\lambda|\leq\delta$ يكون لدينا: $\mu V_x\subset V_{\lambda x}$.

وفي هذه الحالة، يدعى E فضاء شعاعيا طبولوجيا.

قضية 1:

يتحقق الانسجام بين البنية الطبولوجية وبنية الفضاء الشعاعي على مجموعة E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1. التطبيق $(x,y)\to x+y$ من $E\times E$ نحو E مستمر.
2. من أجل كل $a\in E$ التطبيق $\lambda\to\lambda a$ من K نحو E مستمر عند 0.

3. من أجل كل $\alpha \in K$ التطبيق $x \to \alpha x$ من E نحو E مستمر عند O.
4. التطبيق $(\lambda, x) \to \lambda x$ من $K \times E$ نحو E مستمر عند $(0, O)$.

الإثبات:

من التعريف1، إذا كان E فضاء شعاعيا طبولوجيا فإن الشروط 1،2،3،4 هي محققة بكل وضوح.

عكسيا:

العلاقة: $\lambda x = \alpha a + (\lambda - \alpha)a + \alpha(x - a) + (\lambda - \alpha)(x - a)$ تثبت أنه عندما $\lambda \to \alpha$ و $x \to a$ (الأمر الذي يجعل $(\lambda - \alpha) \to 0$ و $(x - a) \to O$) يكون لدينا: $\lambda x \to \alpha.a + 0.a + \alpha.O + 0.O = \alpha a$.

إذن التطبيق $(\lambda, x) \to \lambda x$ من $K \times E$ نحو E مستمر.

2- المفتوحات، المغلقات، الملاصقات في فضاء شعاعي طبولوجي

ليكن E فضاء شعاعيا طبولوجيا على K.

خاصية 1:

من أجل كل $\alpha \in K$: $\alpha \neq 0$، وكل $b \in E$، التمديد $x \to \alpha x + b$ من E نحو E هو هوميومورفيزم.

إثبات:

كل تمديد هو تقابل، التطبيق العكسي لتمديد هو كذلك تمديد. ومن تعريف الفضاء الشعاعي الطبولوجي نجد أن كل تمديد مستمر، وبالتالي فكل تمديد هو تقابل ومستمر، وكذالك تطبيقه العكسي.

إذن كل تمديد هو هوميومورفيزم.

خاصية 2:

إذا كان U مفتوحا في E فإنه من أجل كل $x \in E$، $x+U$ مفتوح في E.

إثبات:

ليكن x من E، لدينا التطبيق f_x : $y \to x + y$ من E نحو E هو هوميومورفيزم، فإذن من كون U مفتوحا في E فإن $f(U) = x + U$ مفتوح في E.

خاصية 3:

إذا كان U مفتوحا في E و $V \subset E$ فإن $V + U$ مفتوح في E.

إثبات:

لدينا : $V+U=\bigcup\limits_{x\in V}\{x+U\}$.

إذن: انطلاقا من الخاصية السابقة، فإن $V+U$ مفتوح كاتحاد مفتوحات.

خاصية 4:

إذا كان U مفتوحا في E فإن المجموعة λU مفتوحة في E أيضا وهذا مهما يكن $\lambda\neq 0$.

إثبات:

تنتج مباشرة من كون التطبيق $f_\lambda : x\to\lambda x$ من E نحو E حيث $\lambda\neq 0$ هوميومورفيزما.

خاصية 5: نعتبر في هذه الخاصية أن E فضاء منفصل.

إذا كانت F مغلقة في E فإن λF مغلقة في E مهما كانت λ من K .

إثبات:

لما $\lambda=0$ انتهى.

لما $\lambda\neq 0$ فإن المطلوب ينتج مباشرة من كون التطبيق $f_\lambda : x\to\lambda x$ من E نحو E هو هميومورفيزم.

خاصية 6:

إذا كان P فضاء شعاعيا جزئيا (على التوالي. محدبا، مخروطا) من E فإن ملاصقته $\overline{P}$ هي كذلك في E.

إثبات:

نذكر أنه إذا كان التطبيق $f : A\to B$ مستمرا حيث A,B فضاءان طبولوجيان فإنه لدينا:

$\forall X\subset A$ فإن $f(\overline{X})\subset\overline{f(X)}$ ، بالفعل: بماأن $f(X)\subset\overline{f(X)}$ فإن $X\subset\underbrace{f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right)}_{\text{المغلق}}$.

إذن: $\overline{X}\subset f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right)$.

- ليكن P فضاء شعاعيا جزئيا من E وليكن λ,μ من K، وليكن التطبيق: $f:(x,y)\to\lambda x+\mu y$ من $E\times E$ نحو E.

بتطبيق f على $P\times P$ نجد أن: $f|: P\times P\to P$.

ولما كان f مستمرا، واستنادا للتذكير السابق فإنه لدينا: $\overline{P\times P}=\overline{P}\times\overline{P}\to\overline{P}$ وذلك بتطبيق f على $\overline{P\times P}$.

وبالتالي نجد: $\forall x,y\in\overline{P}$ فإن $\lambda x+\mu y\in\overline{P}$، وهذا ما يجعل $\overline{P}$ فضاء شعاعيا جزئيا.

- وبشكل مماثل نجد أن $\overline{P}$ محدب لما P محدب وذلك باستعمال التطبيق التالي:

$(x,y)\to\lambda x+\mu y$ من $E\times E$ نحو E حيث: $\lambda,\mu\geq 0$ و $\lambda+\mu=1$.

- والشيء نفسه بالنسبة للمخروط باستعمال التطبيق: $x\to\lambda x$ من E نحو E بحيث $\lambda\geq 0$.

خاصية 7:

ملاصقة متوازن A من E هي كذلك متوازنة.

إثبات:

ليكن A متوازنا من E.

لدينا: $\forall\lambda\in K$: $|\lambda|\leq 1$ فإن التطبيق f_λ : $x\to\lambda x$ من E نحو E مستمر.

وبتطبيق f على A نجد: f_λ: $A\to A$ ولما كان $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\subset\overline{A}$ فإنه بتطبيق f على $\overline{A}$ نجد: $\overline{A}\to\overline{A}$ ومنه نجد : $\forall x\in\overline{A}$، $\lambda x\in\overline{A}$: $|\lambda|\leq 1$.

إذن $\overline{A}$ متوازن.

خاصية 8:

الغلاف المحدب لمجموعة مفتوحة في E هو كذلك مجموعة مفتوحة في E.

إثبات:

لتكن A مجموعة مفتوحة في E و B غلافها المحدب.

$\forall x\in B$، نثبت أن B جوار لـ x.

من نتيجة (ق4-ف1) نجد أن x يكتب من الشكل: $\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n$ حيث $\lambda_i>0$ و $x_i\in A$ و $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=1$.

لدينا إذن: $x\in\lambda_iA+\lambda_2A+...+\lambda_nA\subset B$.

نثبت أن $\lambda_1A+\lambda_2A+...+\lambda_nA$ هي مجموعة مفتوحة ولكونها تحوي العنصر x وهي محتواة في B، نجد أن B جوار لـ x وهذا ينهي البرهان.

لدينا المجموعات λ_iA عبارة عن مفتوحات (خ4-ف2) وبتطبيق (خ3-ف2) نجد أن $\lambda_1A+\lambda_2A+...+\lambda_nA$ مفتوحة في E.

خاصية 9:

الغلاف المغلق المتوازن (على التوالي المغلق المحدب، المغلق المحدب المتوازن) لمجموعة A من E هو ملاصقة الغلاف المتوازن (على التوالي المحدب، المحدب المتوازن) لـ A.

إثبات:

نثبت الشطر الثالث من الخاصية والبقية تثبت بنفس الطريقة.

نثبت أن: الغلاف المغلق المحدب المتوازن لمجموعة A هو ملاصقة الغلاف المحدب المتوازن لها.

ليكن A_1 الغلاف المحدب المتوازن لـ A و A_2 هو الغلاف المغلق المحدب المتوازن لـ A.

نثبت أن $\overline{A_1} = A_2$.

لدينا: $A_1 \subset A_2$ وهذا من كون A_1 هو أصغر المحدبات المتوازنة التي تحوي A و A_2 هو محدب ومتوازن و يحوي A.

ومن كون A_2 مغلق فإن $\overline{A_1} \subset A_2$، بقي إثبات أن: $A_2 \subset \overline{A_1}$.

من الخاصيتين 6 و 7 ومن كون $\overline{A_1}$ مغلقا فإنه محدب، مغلق، متوازن وهو يحوي A.

وبماأن A_2 هو أصغر محدب متوازن مغلق يحوي A فإن: $A_2 \subset \overline{A_1}$ ومنه المطلوب.

خاصية 10:

طبولوجيا فضاء شعاعي E غير متغيرة بالنسبة للانسحابات.

إثبات:

لتكن $V(x)$ مجموعة جوارات النقطة x.

يكفي إثبات أن: $V(x) = \{w \in P(E) : w = x + v, \quad v \in V(O)\}$.

" $\subset$ ": ليكن w جوارا كيفيا لـ x، بماأن التطبيق: $f : y \to y + x$ من E نحو E مستمر فإن الصورة العكسية لـ w وفق f هي جوار v لسابقة x بهذا التطبيق وهي O.

إذن لدينا: $w = x + v$ حيث أن:

$$f^{-1}(w) = \{y \in E : f(y) \in w\} = \{y \in E : y + x \in w\} = \{y \in E : y \in w - x\} = w - x$$

إذن: $w = x + f^{-1}(w) = x + v$ حيث: $v \in V(O)$.

" $\supset$ ": ليكن v جوارا كيفيا لـ O، إذن $w = x + v$ جوار لـ x وهذا لكون التطبيق: $g : y \to y - x$ من E نحو E مستمرا حيث أن: $x = x + O$ ينتمي إلى $x + v$ ولدينا: $g(w) = \{y - x : y \in w\} = w - x = v$ ومنه: $w = g^{-1}(v)$ وبماأن v جوار لـ O فإن $g^{-1}(v)$ جوار لـ $x = g^{-1}(O)$.

الفصل الثاني

الفضاء الشعاعي الطبولوجي

3- خواص حول الجمل الأساسية لجوارات الصفر في فضاء شعاعي طبولوجي:

نظرية 1:

I- توجد جملة أساسية $\mathcal{B}$ من جوارات الصفر (O) في فضاء شعاعي طبولوجي E تحقق الخواص التالية:

1. مهما يكن $V_1,V_2 \in \mathcal{B}$ يوجد $V_3 \in \mathcal{B}$ بحيث: $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.
2. كل $V \in \mathcal{B}$ هو مجموعة متوازنة.
3. كل $V \in \mathcal{B}$ هو مجموعة ماصة.
4. من أجل كل $V \in \mathcal{B}$ يوجد $U \in \mathcal{B}$ بحيث: $U+U \subset V$.

II- القضية العكسية:

إذا كان E فضاء شعاعيا و $\mathcal{B}$ مجموعة المجموعات الجزئية من E والتي تحقق الخواص من 1 إلى 4، فإن E فضاء شعاعي طبولوجي بحيث تكون $\mathcal{B}$ جملة أساسية من جوارات O.

إثبات:

I- لدينا: إذا كانت $\mathcal{B}$ جملة أساسية من جوارات O في فضاء شعاعي طبولوجي فإن الخاصية1 محققة بكل وضوح، كذلك الأمر بالنسبة للخاصية 4 وذلك لكون $O+O=O$.

نثبت أن كل جوار لـ O هو مجموعة ماصة: هو كذلك من كون $0.x=O$، فمن تعريف الفضاء الشعاعي الطبولوجي فإنه يوجد جوار V_x وعدد $\delta>0$ بحيث: $\lambda V_x \subset V$ من أجل $|\lambda| \leq \delta$، وبصورة خاصة لدينا: $x \in \frac{1}{\lambda}V$ من أجل $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{\delta}$.

ولإنهاء هذا الجزء من البرهان، يكفي إثبات أن الجوارات المتوازنة تشكل جملة أساسية من جوارات O.

ليكن V جوارا لـ O، بماأن $0.O=O$ إذن يوجد جوار V_1 لـ O وعدد $\delta>0$ بحيث أن: $\lambda V_1\subset V$ من أجل $|\lambda|\leq\delta$.

نضع: $V_0=\bigcup\limits_{|\lambda|\leq\delta}\lambda V_1$، بماأن $\delta V_1\subset V_0$ و δV_1 جوار لـ O إذن المجموعة V_0 هي كذلك جوار لـ O.

إذا كان $|\alpha|\leq1$ فإن: $\alpha V_0=\bigcup\limits_{|\lambda|\leq\delta}\alpha\lambda V_1\subset V_0$، إذن V_0 مجموعة متوازنة.

بقي أن نلاحظ أن $V_0\subset V$.

II- القضية العكسية:

يكفي إثبات أن المجموعة τ المعرفة كما يلي : $\tau=\{x+V:V\in\mathrm{B}\}$ ، والتي نعتبرها مجموعة جوارات العنصر x من E، تجعل من E فضاء طبولوجيا.

بالفعل هي كذلك لأنها تحقق:

1- كل جوار لنقطة x هو يحوي هذه النقطة: بالفعل فمن أجل كل $V\in\mathrm{B}$ ولكونه متوازن فهو يحوي O وبالتالي $x\in x+V$.

2- تقاطع جوارين لنقطة x يحوي جوارا ثالثا لهذه النقطة وهذا ينتج مباشرة من الخاصية 1 من هذه النظرية.

3- من أجل كل جوار V_x يوجد جوار $\tilde{V}_x$ بحيث: V_x يحوي جوارا لأية نقطة $y\in\tilde{V}_x$.

نطبق من أجل $x=O$: ليكن $V\in\mathrm{B}$ جوارا كيفيا لـ O، إذن من الخاصية4 لهذه النظرية يوجد $U\in\mathrm{B}$ بحيث $U+U\subset V$، بأخذ $\tilde{V}_0=U$ نجد المطلوب: حيث أنه من أجل $y\in U$ لدينا:

$y+U$ جوار لـ y و $y+U\subset U+U\subset V$.

ومنه E فضاء طبولوجي.

نثبت الآن انسجام هذه الطبولوجيا مع البنية الشعاعية لـ E، من أجل ذلك نستعمل (ق1) -ف2) لهذا الفصل.

لدينا:

1. استمرار التطبيق φ: $(x,y)\to x+y$ من $E\times E$ نحو E:

ليكن V جوارا لـ $x+y$، نعلم أن $V=x+y+V_O$ حيث: $V_O\in \mathcal{B}$، من الخاصية 4 لهذه النظرية نستطيع اختيار $W_O\in \mathcal{B}$ بحيث: $W_O+W_O\subset V_O$، إذن: $(x+W_O)+(y+W_O)\subset V$ وهذا ما يثبت أن صورة $(x+W_O)\times(y+W_O)$ بواسطة φ محتواة في V، ولما كان $(x+W_O)\times(y+W_O)$ جوارا لـ (x,y) نجد أن التطبيق φ مستمر.

2. استمرار التطبيق $f:(\lambda,x)\to\lambda x$ من $K\times E$ نحو E عند $(0,O)$:

ليكن V_O جوارا لـ O، من الخاصية 2 للنظرية يوجد $W_O\in \mathcal{B}$ متوازن بحيث: $W_O\subset V_O$، وليكن D هو قرص الوحدة في K.

لدينا: $f(D\times W_O)\subset W_O$ (لأن W_O متوازن).

وبالتالي استمرار f عند $(0,O)$.

3. الخاصية 3 من هذه النظرية تثبت أنه من أجل كل $x\in E$ التطبيق $\lambda\to\lambda x$ من K نحو E مستمرعند $\lambda=0$.

4. استمرار التطبيق $g: x\to\lambda x$ من E نحو E عند O من أجل كل λ من K نحصل عليه من من النتيجة التالية النابعة من الخاصيتين 2 و 4 لهذه النظرية، إذ أنه:

من الخاصية 4 لهذه النظرية: نجد أنه من أجل كل $V\in \mathcal{B}$ يوجد $\tilde{V}\in \mathcal{B}$ بحيث $2\tilde{V}\subset V$ وبنفس الطريقة نجد أنه من أجل $n\in N$ يوجد $V^{(n)}\in \mathcal{B}$ بحيث: $2^nV^{(n)}\subset V$.

وبأخذ n كبيرة بكفاية فإنه من أجل كل $\lambda\in K$ بحيث $|\lambda|\le 2^n$ يكون لدينا: $\lambda V^{(n)}=\frac{\lambda}{2^n}.2^nV^{(n)}\subset 2^nV^{(n)}\subset V$ وهذا بعدما نحصل على توازن $2^nV^{(n)}$، هو كذلك لكون $V^{(n)}$ متوازن (أنظر الخاصية 2 لهذه النظرية).

خاصية 11:

من أجل كل $V\in \mathcal{B}$ وكل $\lambda\in K$: $\lambda\neq 0$ فإنه يوجد $W\in \mathcal{B}$ بحيث: $W\subset\lambda V$.

إثبات:

بتطبيق الخاصية 4 من النظرية 1 عدة مرات، نلاحظ أنه من أجل كل $V\in \mathcal{B}$ وكل عدد طبيعي n يوجد $W^{(n)}\in \mathcal{B}$ بحيث:

$$2^nW^{(n)}\subset V\text{......}(*).$$

بأخذ n كبيرة بكفاية لنحصل على: $\left(2^n|\lambda|\right)^{-1}\leq 1$، وبماأن $W^{(n)}$ متوازن لدينا إذن:

$\left(2^n|\lambda|\right)^{-1}W^{(n)} \subset W^{(n)}$.

وأخيرا: $W^{(n)} \subset |\lambda|\,2^n W^n \subset |\lambda|\ V \subset \lambda V$.

وبالتالي يكفي أخذ $W = W^{(n)}$.

توضيح (*):

نثبتها بالتراجع على n:

من أجل $n=1$ هي تنتج مباشرة من الخاصية 4 للنظرية 1، لأن: $2W_1 \subset W_1+W_1 \subset V$.

نفرض أنه يوجد W_n: $2^nW_n \subset V$، يوجد إذن W_{n+1} بحيث: $2^{n+1}W_{n+1} \subset V$. بالفعل، ليكن W_{n+1} بحيث: $W_{n+1}+W_{n+1} \subset W_n$ (الخاصية 4 للنظرية 1)؛ لدينا:

$W_n \supset W_{n+1}+W_{n+1} \supset 2W_{n+1}$ و $2^{n+1}W_{n+1} \subset 2^nW_n \subset V$.

خاصية 12:

في فضاء شعاعي طبولوجي توجد جملة أساسية من الجوارات المفتوحة لـ O.

إثبات:

يكفي أخذ المجموعة التي عناصرها هي الجوارات المفتوحة لـ O والتي هي محتواة في كل $V\in \mathrm{B}$.

خاصية 13:

لتكن $\mathcal{V}$ جملة أساسية من جوارات O في فضاء شعاعي طبولوجي E .

من أجل كل جزء A من E لدينا: $\bar{A} = \bigcap_{V\in\mathcal{V}}(A+V)$.

إثبات:

نثبت أولا أنه إذا كان $x \in \bar{A}$ فإن $x \in A+V$ من أجل كل $V \in \mathcal{V}$.

لدينا كل $V \in \mathcal{V}$ هو يحوي جوارا W لـ O متناظرا.

إذا كانت $x \in \bar{A}$ فإن الجوار $x+W$ يتقاطع مع A، ليكن إذن $y \in W$ بحيث $x+y \in A$

إذن: $x \in -y+A \subset A+W \subset A+V$.

الآن: نبين أنه إذا كان $x \in A+V$ من أجل كل $V \in \mathcal{V}$ فإن: $x \in \bar{A}$.

نستدل على ذلك باستعمال عكس النقيض:

إذا كان $x \notin \overline{A}$ فإنه يوجد جوار متناظر W لـ O بحيث: $x+W$ و A غير متقاطعين، إذن $x+y \notin A$ وهذا $\forall y \in W$ وبالتالي: $\forall y \in W$ $x \notin -y+A$. ولما كان W متناظرا فإن: $x \notin A+W$.

وبماأن W جوار لـ O فإنه يوجد $V \in \mathcal{V}$ بحيث $V \subset W$ وبالتالي: $\exists V \in \mathcal{V}$ بحيث $x \notin A+V$. ومنه المطلوب.

خاصية 14:

لتكن B جملة أساسية من جوارات O في فضاء شعاعي طبولوجي E.

مجموعة ملاصقات مجموعات B هي أيضا جملة أساسية من جوارات O في E.

إثبات:

من النظرية1، فإنه من أجل كل $V \in \mathrm{B}$ يوجد $W \in \mathrm{B}$ بحيث: $W+W \subset V$.

من (خ13-ف2) لدينا: $\overline{W}=\bigcap_{U \in B}(W+U) \subset W+W \subset V$.

إذن $\overline{W}$ جوار لـ O محتوى في V، وبالتالي المطلوب.

خاصية 15:

كل فضاء شعاعي طبولوجي يقبل جملة أساسية من جوارات O المغلقة، المتوازنة والماصة.

إثبات:

يكفي أخذ ملاصقات مجموعات الجملة الأساسية B المذكورة في النظرية 1، حيث أن هذه الملاصقات هي متوازنة (خ7-ف2)، وكذلك هي ماصة.

خاصية 16:

لتكن B جملة أساسية من جوارات O في فضاء شعاعي طبولوجي.

مجموعة الأغلفة المتوازنة لمجموعات B هي كذلك جملة أساسية لجوارات O في E، والحال نفسه بالنسبة لمجموعة الأغلفة المغلقة والمتوازنة لمجموعات B.

إثبات:

يجب إثبات أنه من أجل جوار كيفي V لـ O في E فإنه يوجد غلاف متوازن (على التوالي مغلق متوازن) لمجموعة من $\mathcal{B}$ يكون محتوى في V.

لدينا: من (خ15-ف2)، يوجد جوار W مغلق ومتوازن بحيث $W \subset V$ ، إذن يوجد جوار $U \in \mathcal{B}$ بحيث $U \subset W$.

إذا كان U_1 هو الغلاف المتوازن (علىالتوالي المغلق المتوازن) لـ U فإنه لدينا: $U_1 \subset W \subset V$ وهذا يعطي المطلوب.

خاصية 17:

كل فضاء شعاعي طبولوجي E يقبل جملة أساسية من جوارات O المفتوحة، المتوازنة والماصة.

إثبات:

في E ، توجد جملة أساسية من الجوارات المفتوحة لـ O (خ12-ف2)، ولتكن $\mathcal{B}$ هي هاته الجملة.

من (خ16-ف2)، مجموعة الأغلفة المتوازنة لـ $V \in \mathcal{B}$ هي جملة أساسية لجوارات O.

إذن يكفي إثبات أن الغلاف المتوازن لجوار مفتوح لـ O هو مجموعة مفتوحة.

لدينا: هذا الغلاف يكتب من الشكل $\bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda V$ وبماأن $O \in V$، نقتصر على اتحاد المجموعات λV من أجل $\lambda \neq 0$ و$|\lambda| \leq 1$، وبماأن هذه المجموعات الأخيرة مفتوحة فإن اتحادها كذلك، وهذا ينهي البرهان.

خاصية 18:

حتى يكون فضاء شعاعيا طبولوجيا E منفصلا يلازم ويكفي أن يكون من أجل كل $x \neq O$ يوجد جوار V لـ O في E بحيث أن $x \notin V$.

إثبات:

- لزوم الشرط : واضح.
- نثبت الآن كفاية الشرط:

ليكن $x,y \in E$ بحيث $x \neq y$ إذن: $x - y \neq O$.

ليكن V جوارا لـ O في E بحيث $x-y \notin V$، وليكن W جوارا متوازنا لـ O بحيث: $W+W \subset V$ (الخاصية 4 من النظرية 1).

إذن: $x-y \notin W+W$ .....(*).

لدينا: $x+W$ و $y+W$ جوارين لـ x و y على التوالي غير متقاطعين، فإذا فرضنا العكس يكون لدينا: $x+z=y+\tilde{z}$ حيث: $z,\tilde{z} \in W$. إذن $x-y=\tilde{z}-z \in W+W$ وهذا ما يعطي التناقض مع النتيجة (*) أعلاه.

خاصية 19:

ليكن B جملة أساسية من جوارات O في فضاء شعاعي طبولوجي E.

حتى يكون E منفصلا يلزم ويكفي أن يكون: $\bigcap_{V \in B} V=\{O\}$ ....(*).

إثبات:

- إذا كان E منفصلا و $x \neq O$ فإنه يوجد جوار $V \in \mathrm{B}$ بحيث $x \notin V$. وهذا ما يعطي العلاقة (*).

- **عكسيا**: نفرض أن (*) محققة و $x \neq y$ إذن يوجد $V \in \mathrm{B}$ بحيث $x-y \notin V$.

من النظرية 1 (خاصية 4): يوجد جوار U لـ O متوازن بحيث $U+U \subset V$.

إذن $x+U$ و $y+U$ جوارين غير متقاطعين للنقطتين x و y؛ حيث أنه إذا فرضنا العكس:

فمن أجل $z \in (x+U) \cap (y+U)$ فإن:

$x-y=(z-y)-(z-x) \in U-U=U+U \subset V$ ، تناقض.

تعريف:

نقول عن فضاء شعاعي طبولوجي E إنه قابل لمسافة إذا كان منفصلا ويقبل جملة أساسية عدودية من جوارات O.

بماأن كل جوار من جملة أساسية هو يحوي جوارا من نفس الجملة فإننا نلاحظ أن فضاء E قابلا لمسافة هو يقبل جملة أساسية عدودية $\{V_n\}_n$ من جوارات O بحيث: $V_{n+1} \subset V_n$ من أجل كل n.

بالإضافة إلى ذلك وبماأن E منفصلا فإنه من أجل كل $x \in E$ بحيث $x \neq O$ يوجد جوار V_n بحيث $x \notin V_n$، إذن تقاطع كل الجوارات V_n يعطي $\{O\}$.

إذن: مما سبق يمكن إعطاء الخاصية التالية:

خاصية 20:

كل فضاء شعاعي طبولوجي قابل لمسافة يقبل جملة أساسية عدودية من الجوارات V_n لـ O المغلقة (على التوالي المفتوحة)، المتوازنة والماصة بحيث: $V_{n+1} \subset V_n$ مهما يكن n، والتي تقاطعها يعطي O.

الفصل الثالث

المجموعات المحدودة

1-المجموعات المحدودة:

تعريف 1:

ليكن E فضاءً شعاعيا طبولوجيا.

نقول عن مجموعة A من E أنها محدودة إذا كانت ممتصة من طرف كل جوار لـ O.

أي أنه: من أجل كل جوار V لـ O في E، يوجد عدد حقيقي $k>0$ بحيث $\forall|\lambda|\geq k$،

$A\subset\lambda V$.

نظرية 1:

حتى يكون جزء A من E محدودا يلزم ويكفي أنه من أجل أي متتالية $\{x_n\}\subset A$ وأي متتالية $\{\lambda_n\}\subset K$ تحقق أنها متقاربة نحو 0 يكون لدينا $\lambda_n x_n \to O$.

إثبات:

لزوم الشرط:

لتكن $\{x_n\}$ و $\{\lambda_n\}$ المتتاليتان المشار إليهما في النظرية، وليكن V جوارا متوازنا كيفيا لـ O.

يوجد $\lambda>0$ بحيث $A\subset\lambda V$. وبصورة خاصة $x_n \in \lambda V$: $n=1,2,...$. إذن، من أجل n كبيرة بكفاية لنحصل على $|\lambda_n|\leq\frac{1}{\lambda}$ نجد أن $\lambda_n x_n \in \lambda_n\lambda V\subset V$ أي أن $\lambda_n x_n\to O$.

كفاية الشرط :

نفرض بالتناقض أنه ضمن شروط النظرية، A ليس محدودا، يوجد إذن جوار V لـ O بحيث لا يكون $A-\lambda V$ خاليا من أجل أي $\lambda>0$.

نضع على التوالي $\lambda=1,2,...$ فنحصل على متتالية العناصر $x_n\in A-nV$: $n=1,2,...$.

ولما كان من جهة $x_n\in A$: $n=1,2,...$، ومن جهة اخرى $\frac{1}{n}x_n\notin V$ نجد التناقض.

خاصية 1:

كل اتحاد منته لأجزاء محدودة هو محدود، وبصورة خاصة المجموعات المنتهية هي محدودة.

إثبات:

ليكن A_1,A_2 جزءين محدودين من E، وليكن V جوارا متوازنا لـ O، يوجد إذن α_1,α_2 موجبين تماما بحيث: $\forall|\lambda|\geq\alpha_1 \quad A_1\subset\lambda_1 V$ و $\forall|\lambda|\geq\alpha_2 \quad A_2\subset\lambda_2 V$.

بوضع $\alpha=Max(\alpha_1,\alpha_2)$ نجد أن: $|\lambda|\geq\alpha \quad A_1\cup A_2\subset\lambda V$. ومنه المطلوب.

خاصية 2:

كل جزء من جزء محدود هو محدود.

إثبات : واضح.

خاصية 3:

ليكن A_1,A_2 جزءين محدودين في E، إذن A_1+A_2 محدود كذلك.

إثبات:

ليكن V جوارا لـ O في E، إذن يوجد W جوارا متوازنا لـ O بحيث: $W+W\subset V$ (ن 1-ف2)، إذن يوجد $\alpha_1>0$، $\alpha_2>0$ بحيث: $\forall|\lambda|\geq\alpha_1 \quad A_1\subset\lambda W$، $\forall|\lambda|\geq\alpha_2 \quad A_2\subset\lambda W$.

بوضع $\alpha=Max(\alpha_1,\alpha_2)$ نجد أن: $\forall|\lambda|\geq\alpha \quad A_1+A_2\subset\lambda(W+W)\subset\lambda V$.

إذن: $\forall|\lambda|\geq\alpha \quad A_1+A_2\subset\lambda V$ ، ومنه المطلوب.

خاصية 4:

ملاصقة جزء محدود هي محدودة.

إثبات:

ليكن A جزءًا محدودا من E، وليكن U جوارا مغلقا لـ O.

إذن يوجد $\alpha>0$ بحيث: $\forall|\lambda|\geq\alpha \quad A\subset\lambda U$.

إذن من أجل نفس الـ α يكون لدينا: $\overline{A}\subset\overline{\lambda U}=\lambda\overline{U}=\lambda U$ (لأن U مغلق)، وبالتالي: $\exists\alpha>0$: $\overline{A}\subset\lambda U$، $\forall|\lambda|\geq\alpha$، إذن $\overline{A}$ محدودة.

خاصية 5:

كل متراص محدود.

إثبات:

ليكن K متراصا من E و U جوارا مفتوحا ومتوازنا لـ O.

لدينا: $E=\bigcup_{n\in N} nU$. إذن الجماعة $\{nU\}_{n\in N}$ هي تغطية للمتراص K، وبالتالي يمكن استخراج منها تغطية منتهية لـ K ولتكن $\{n_iU\}_{i=1}^{k}$.

نضع $n_0=Max\{n_i\}_{i=1}^{k}$ ، لدينا: $K\subset n_0U$، إذن K ممتص من طرف U.

ومنه K محدود، وهو المطلوب.

خاصية 6:

ليكن E,F فضاءين شعاعيين طبولوجيين و $f:E\to F$ تطبيقا مستمرا و B جزءًا محدودا في E.

لدينا: $f(B)$ محدود في F إذا تحققت إحدى الشروط التالية:

1- $f(\lambda x)=\lambda f(x)\qquad \forall\lambda\in K$.

2- $f(\lambda x)=|\lambda|f(x)\qquad \forall\lambda\in K$.

إثبات:

ليكن V جوارا متوازنا لـ O في F.

استمرارية التطبيق f عند O تعطي أن $U=f^{-1}(V)$ جوار لـ O في E.

ولما كان B محدودا في E فإنه يوجد $\alpha>0$ بحيث: $\forall|\lambda|\geq\alpha\quad B\subset\lambda U$، إذن:

$\forall|\lambda|\geq\alpha\quad f(B)\subset f(\lambda U)$.

لدينا: $f(\lambda U)=\begin{cases}\lambda f(U)..........(1)\\ |\lambda|f(U)..........(2)\end{cases}$.

ومن كون $f(U)\subset V$ فإنه لدينا: $|\lambda|f(U)\subset|\lambda|V$.

ولما كان V متوازنا فإن: $\lambda V=|\lambda|V$، ومنه: $\forall|\lambda|\geq\alpha\quad f(\lambda U)\subset\lambda V$.

إذن: $\forall|\lambda|\geq\alpha\quad f(B)\subset\lambda V$. وبالتالي $f(B)$ محدود في F.

خاصية 7:

صورة جزء محدود وفق تطبيق خطي مستمر محدودة.

إثبات: نتيجة مباشرة لـ (خ6-ف3)

خاصية 8:

لكي يكون جزءًا $A\times B$ من جداء الفضائين الشعاعيين الطبولوجيين $E\times F$ محدودا يلزم ويكفي أن يكون A محدودا في E و B محدودا في F.

إثبات:

لزوم الشرط:

من كون التطبيقين π_1,π_2 خطيين ومستمرين، حيث أن: $\pi_1:(x,y)\to x$ من $E\times F$ نحو E و $\pi_2:(x,y)\to y$ من $E\times F$ نحو F، فإن صورة المحدود $A\times B$ وفق كل منهما هو محدود (خ7-ف3).

إذن A و B محدودان.

كفاية الشرط:

ليكن $U\times V$ جوارا لـ (O_E,O_F) في $E\times F$.

بما أن A,B محدودان، فإنه يوجد $\alpha_1>0$ و $\alpha_2>0$ بحيث: $\forall|\lambda|\geq\alpha_1 \quad A\subset\lambda U$ و $\forall|\lambda|\geq\alpha_2 \quad B\subset\lambda V$.

نضع $\alpha=Max(\alpha_1,\alpha_2)$.

لدينا: $\forall|\lambda|\geq\alpha \quad A\times B\subset\lambda U\times\lambda V=\lambda(U\times V)$.

إذن: $\forall|\lambda|\geq\alpha \quad A\times B\subset\lambda(U\times V)$.

ومنه $A\times B$ محدود، وهو المطلوب.

خاصية 9:

كل متحاك لجزء محدود هو محدود.

إثبات:

باستعمال التطبيق الخطي المستمر التالي: $x\to\lambda x$ من E نحو E، واستنادا لـ (خ7-ق3) نجد المطلوب.

خاصية 10:

كل متتالية كوشية محدودة.

إثبات:

ليكن V جوارا لـ O، يوجد W جوار متوازن لـ O بحيث: $W+W \subset V$.

وبما أن $(x_n)_n$ كوشية فإنه يوجد n_0 من N بحيث: $\forall p,q \geq n_0 \Rightarrow x_p - x_q \in W$، وبما أن W ماص فإنه يمتص x_{n_0}: أي أنه يوجد $\alpha > 0$ بحيث : $\forall |\lambda| \geq \alpha \quad x_{n_0} \in \lambda W$، وبصورة خاصة من أجل $\lambda = \alpha$ لدينا $x_{n_0} \in \alpha W$.

نفرض أن $\alpha \geq 1$.

من أجل $p \geq n_0$ ومن توازن W لدينا:

$x_p \in x_{n_0} + W \subset \alpha W + W \subset \alpha W + \alpha W \subset \alpha(W+W) \subset \alpha V$.وهذا يثبت أن المجموعة $\{x_i : i \geq n_0\}$ محدودة. ولما كانت المجموعة $\{x_i : i = 0, n-1\}$ منتهية فهي كذلك محدودة (خ 1-ف3).

ومنه $(x_n)_n$ محدودة.

خاصية 11:

ليكن M فضاءً شعاعيا جزئيا من E مزودا بطبولوجيا الأثر.

لكي يكون جزءًا A من M محدودا في E يلزم ويكفي أن يكون محدودا في M .

إثبات:

لزوم الشرط:

نفرض أن A محدودا على E .

ليكن U_M جوارا لـ O في M، من تعريف طبولوجيا الأثر على M فإنه يوجد U: $U \in V(O)$ في E بحيث: $U_M = U \cap M$.

ليكن $\alpha > 0$ والذي يحقق: $\forall |\lambda| \geq \alpha \quad A \subset \lambda U$.

إذن من أجل $|\lambda| \geq \alpha$ لدينا: $A = A \cap M \subset \lambda U \cap M = \lambda(U \cap M) = \lambda U_M$.

ومنه A محدود في M .

كفاية الشرط:

نفرض أن A محدود في M .

ليكن U جوارا لـ O في E، إذن $U\cap M$ جوار لـ O في M، إذن A ممتصة من طرف $U\cap M$ ، إذن هي كذلك من طرف U.

وبالتالي A محدود في E .

2-المجموعات المحدودة كليا:

تعريف 2:

نقول عن جزء G من فضاء شعاعي طبولوجي E أنه محدود كليا، إذا كان من أجل كل جوار V لـ O في E، يوجد جزء منته $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset G$ بحيث: $G \subset \bigcup_{k=1}^{n}\{x_k+V\}$.

خاصية 12:

كل مجموعة محدودة كليا هي محدودة.

إثبات:

ليكن A جزءًا محدودا كليا في E، وليكن V جوارا متوازنا لـ O.

من النظرية 1، يوجد W جوار متوازن لـ O بحيث: $W+W \subset V$، ومن تعريف المحدود كليا فإنه يوجد $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset A$ جزء منته بحيث: $A \subset \bigcup_{k=1}^{n}\{x_k+W\}$.

ولما كانت $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ مجموعة منتهية فهي محدودة، وبالتالي يوجد λ يحقق: $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset \lambda W$، ومنه نجد: $A \subset \lambda W+W \subset Max(|\lambda|,1)\,(W+W) \subset Max(|\lambda|,1)\,V$، وهذا ما يجعل A محدودا في E.

خاصية 13:

كل اتحاد منته لأجزاء محدودة كليا هو محدود كليا.

إثبات:

ليكن A_1,A_2 جزءين محدودين كليا في E، وليكن V جوارا لـ O. يوجد إذن جزء $\{x_k\}_{k=1}^{n_1} \subset A_1$ وجزء $\{y_k\}_{k=1}^{n_2} \subset A_2$ بحيث : $A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n_1}\{x_k+V\}$ و $A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{n_2}\{y_k+V\}$.

لدينا إذن: $A_1 \cup A_2 \subset \left[\bigcup_{k=1}^{n_1}\{x_k+V\}\right] \cup \left[\bigcup_{k=1}^{n_2}\{y_k+V\}\right]$..........(*) .

بوضع $k=1,n$, $y_k=x_{n_1+k}$ نجد أن (*) تصبح: $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{n_1+n_2}\{x_k+V\}$ ، إذن يوجد جزء $\{x_k\}_{k=1}^{n_1+n_2} \subset A_1 \cup A_2$ بحيث: $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{n_1+n_2}\{x_k+V\}$ ، ومنه المطلوب.

خاصية 14:

كل متحاك لجزء محدود كليا هو محدود كليا .

إثبات:

ليكن A جزءا محدودا كليا في E ، وليكن V جوارا متوازنا لـ O، إذن يوجد جزء $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset A$ بحيث: $A \subset \bigcup_{k=1}^{n}\{x_k+V\}$. إذن: $\bigcup_{k=1}^{n}\{\lambda x_k+\lambda V\} \subset \lambda\bigcup_{k=1}^{n}\{x_k+V\} \subset \lambda A$، إذن بوضع $y_k=\{\lambda x_k\}_{k=1}^{n}$ نصل إلى المطلوب

خاصية 15:

إذا كان A_2 , A_1 جزءين محدودين كليا في فضاء شعاعي طبولوجي E، فإن A_1+A_2 كذلك.

إثبات:

ليكن V جوارا لـ O. يوجد إذن W جوار لـ O (حسب النظرية 1) بحيث تكون: $W+W \subset V$. ومن تعريف المحدود كليا فإنه يوجد جزء منته $\{x_k\}_{k=1}^{n_1} \subset A_1$ وآخر بحيث: $A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n_1}\{x_k+W\}$ ، $A_2 \subset \bigcup_{\tilde{k}=1}^{n_2}\{y_{\tilde{k}}+W\}$.

ومنه: $A_1+A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{n_1}\{x_k+W\}+\bigcup_{\tilde{k}=1}^{n_2}\{y_{\tilde{k}}+W\} \subset \bigcup_{k=1}^{n_1}\bigcup_{\tilde{k}=1}^{n_2}\{x_k+y_{\tilde{k}}+W+W\} \subset \bigcup_{k=1}^{n_1}\bigcup_{\tilde{k}=1}^{n_2}\{x_k+y_{\tilde{k}}+V\}$.

إذن توجد مجموعة منتهية $\{x_k+y_{\tilde{k}}\}_{k=1,n_1 \quad \tilde{k}=1,n_2}$ محتواة في A_1+A_2 وتحقق المطلوب. إذن A_1+A_2 مجموعة محدودة كليا.

ملاحظة:

- نفس ما سبق يمكن تطبيقه على كرة مغلقة ذات نصف قطر $\rho>0$.

- الكرة المغلقة $B(O,0)$ هي فضاء شعاعي جزئي من E لا تقتصر على $\{O\}$ إلا إذا كان P نظيما.

الكرات المرفقة لعائلة من أنصاف النظيمات:

ليكن E فضاءً شعاعيا، وليكن $\mathbf{P}=(P_i)_{i\in I}$ عائلة منتهية أو غير منتهية من أنصاف النظيمات على E. نرمز بـ $B_i(O,\rho)$ للـ P_i - كرة مفتوحة ذات المركز a ونصف القطر ρ.

نسمي **P**-كرة مفتوحة ذات المركز a كل تقاطع منته من الـ P_i-كرات مفتوحة ذات المركز a، تقاطع **P**-كرتين مفتوحتين ذاتا المركز a هي أيضا P-كرة ذات مركز a.

ملاحظة:

في حالة اعتبار عناصر **P** هم المضاعفات λP (حيث $\lambda>0$) لنصف نظيم P، يمكن إثبات أنه لا يمكن التكام عن نصف قطر الـ **P**-كرة.

تعريف الـ P-طبولوجيا:

نقول عن جزء X من E أنه مفتوح إذا كان $X=\phi$ أو إذا كان من أجل كل $x\in X$ توجد P-كرة مفتوحة ذات مركز x محتواة في X.

واضح أن مجموعة هذه المفتوحات تحقق شروط الفضاء الطبولوجي، إذن يمكن أن نعطي التعريف التالي:

ليكن E فضاءً شعاعيا ولتكن P عائلة كيفية من أنصاف النظيمات على E.

نسمي P-طبولوجيا **(**أو طبولوجيا مرفقة بعائلة من أنصاف نظيمات) الطبولوجيا المعرفة على E بحيث تكون مفتوحاتها هي المجموعات X بحيث كل نقطة من نقاطها هي مركز لـ P-كرة مفتوحة محتواة في X.

- نثبت أنه من أجل هذه الطبولوجيا كل P_i-كرة مفتوحة هي مفتوحة.

بالفعل:

ليكن $x\in B_i(x,\rho)$، الكرة المفتوحة $B_i(x,\varepsilon)$ حيث $\varepsilon=\rho-P_i(a-x)$ هي محتواة في $B_i(a,\rho)$ لأن العلاقة:

أ
$P_i(x-y)<\rho-P_i(a-x)$ تجعل: $P_i(a-y)\le P_i(a-x)+P_i(x-y)<\rho$.

قضية 2:

كل P-طبولوجيا على فضاء شعاعي E هي منسجمة مع البنية الشعاعية لـ E .

إثبات:

سوف نتحقق من الشروط 1، 2، 3، 4 من (ق1-ف2).

نرمز بـ B لـ P-كرة مفتوحة كيفية ذات المركز O .

1- من أجل كل $a,b\in E$ ، الكرتان $a+\frac{1}{2}B$ و $b+\frac{1}{2}B$ هما جواران لـ a و b على الترتيب، وادينا بالنظر لتحدب B مايلي:

$\left(a+\frac{1}{2}B\right)+\left(b+\frac{1}{2}B\right)=(a+b)+\frac{1}{2}(B+B)\subset(a+b)+B$. وهذا ما يعطينا استمرار التطبيق $(x,y)\to x+y$ عند النقطة (a,b) .

2- إذا كان $B=\bigcap_{i\in J}B_i(O,\rho_i)$ فإن الشرط $\lambda a\in B$ يكتب على الشكل التالي:

$\forall i\in J\quad |\lambda|P_i(a)\le\rho_i$.

إذن: $|\lambda|\le\underset{i\in J}{Inf}\left(\rho_i P^{-1}(a)\right)$ أي أن : $k>0 : k<|\lambda|$.

3- الشرط $\alpha x\in B$ هو محقق من أجل كل x من E إذا كان $\alpha=0$ و إلا فهو يكتب على الشكل $x\in\alpha^{-1}B$ حيث أن $\alpha^{-1}B$ هو جوار لـ O .

4- الشرط $\lambda x\in B$ هو محقق مادام $|\lambda|\le1$ و $x\in B$.

ومنه الإنسجام المطلوب.

إستمرارية شكل خطي:

قضية 3:

ليكن E فضاءً شعاعيا مزودا بـ P-طبولوجيا.

القول عن شكل خطي f على E أنه مستمر يكافئ القول أنه توجد عائلة جزئية منتهية $(P_i)_{i\in J}$ من P وثابت $k>0$ بحيث: $|f|\le k\,\underset{i\in J}{Sup}\,P_i$ .... (*) .

إثبات:

1- العلاقة (*) تعطي أن $|f(x)|\le k$ على تقاطع الكرات المفتوحة $\{\,x_i : P_i(x)<1\,\}_{i\in J}$ وهذا يجعل f مستمرا (f شكل خطي محدود على مفتوح فهو مستمر).

2 - **عكسيا:** إذا كان f مستمرا فإنه توجد P-كرة مفتوحة B ذات مركز O بحيث يكون $|f(x)|\leq 1$ عليها.

من أجل كل $x\in E$ يوجد $\lambda>0$ بحيث $x\in\lambda B$ ومن أجل λ معينة لدينا: $|f(x)|\leq\lambda$.

ولما كان B من الشكل: $B=\bigcap_{i\in J}\{\ x: P_i(x)<\varepsilon_i\ \}$ لدينا إذن: $|f(x)|\leq\lambda$ من أجل كل $\lambda>0$ بحيث: $P_i(x)<\lambda\varepsilon_i$ أي: $\forall i\in J\quad \varepsilon_i^{-1}P_i(x)<\lambda$. ينتج إذن أن: $|f(x)|\leq \underset{J}{Sup}\left(\varepsilon_i^{-1}P_i(x)\right)\leq k\,\underset{J}{Sup}\,P(x)_i : \left(k=Sup\,\varepsilon_i^{-1}\right)$.

ومنه: $|f(x)|\leq kSupP_i$

الفضاءات الجزئية وفضاءات الجداء:

- ليكن E فضاءً شعاعيا، وليكن F فضاءً شعاعيا جزئيا من E.

من أجل كل نصف نظيم P على E، أثر P على F هو نصف نظيم q على F. ومن أجل كل $a\in F$ الأثر على F لـ P-كرة مفتوحة ذات المركز a ونصف القطر ρ هي الـ q-كرة مفتوحة ذات المركز a ونصف القطر ρ. إذن من أجل كل عائلة $(P_i)_i$ من أنصاف نظيمات على E فإن الأثر على F للطبولوجيا المرافقة للعائلة $(P_i)_i$ هي الطبولوجيا المرافقة للعائلة $(q_i)_i$.

- ليكن E و F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K ولتكن (P_i) و(q_i) عائلتين من أنصاف النظيمات على E و F (على الترتيب).

كل من الفضاءين E و F مزود بالـ P-طبولوجيا المتعلقة به.

لدينا الجداء $E\times F$ مزود ببنية فضاء شعاعي وكذلك ببنية فضاء طبولوجي الناتجة من جداء الطبولوجيتين المعرفتين على E و F. ومن جهة أخرى التابعان: $(x,y)\to P_i(x)$ و $(x,y)\to q_i(y)$ يشكلان عائلة من أنصاف النظيمات والتي تعرف P-طبولوجيا على $E\times F$، وسوف نلاحظ أن هذه الـ P-طبولوجيا تطابق طبولوجيا الجداء.

بالفعل: فالكرات المفتوحة ذات المركز O المرافقة لأنصاف النظيمات على $E\times F$ هي التقاطعات المنتهية لكرات مفتوحة من الشكل: $\{\ (x,y): P_i(x)<\varepsilon_i\ \}$ أو $\{\ (x,y): q_i(y)<\varepsilon_i\ \}$.

!

ومن جهة أخرى نقول أن هذه الكرات ما هي إلا جداء لكرة مفتوحة ذات مركز O في E وكرة مفتوحة ذات مركز O في F، وبما أن هذه الجداءات تشكل أساسا لجوارات O من أجل طبولوجيا الجداء، فإننا نكون قد وصلنا إلى المطلوب.

الإنفصال:

قضية 4:

لكي تكون $\mathcal{P}$-طبولوجيا على فضاء شعاعي E منفصلة يلزم ويكفي أن يكون من أجل كل $x \neq O$ من E يوجد نصف نظيم $P \in \mathcal{P}$ بحيث: $P(x) \neq 0$.

إثبات:

- إذا وجد $x \neq O$ بحيث $P(x) = 0$ من أجل كل $P \in \mathcal{P}$، فإن كل $\mathcal{P}$-كرة مفتوحة ذات مركز O تصبح تحوي x، إذن لا يمكن فصل النقطة x عن O بواسطة مفتوحين غير متقاطعين.

- نفرض أنه من أجل كل $x \neq O$ من E يوجد $P \in \mathcal{P}$ بحيث $P(x) \neq 0$.

الـ P-كرتان المفتوحتان $B(O,\rho)$ و$B(x,\rho)$ حيث: $\rho = \frac{1}{2}P(x)$ غير متقاطعتين.

وبصورة أعم نقطتان مختلفتان كيفيتان هما من الشكل y و$y+x$ حيث $x \neq O$، ومن الفرض، يمكن أن نفصلهما بالـ P-كرتين المفتوحتين التاليتين: $B(y,\rho)$ و$B(x+y,\rho)$.

الفصل الخامس

أمثلة تقليدية لفضاءات شعاعية طبولوجية

سوف نعطي الآن بعض الأنواع من الفضاءات الشعاعية الطبولوجية، وسوف يكون كل نوع منها مزودا بـ P-طبولوجيا، وبالتالي سوف نكتفي في كل مرة بإعطاء عائلة أنصاف النظيمات الموافقة لكل طبولوجيا .

1- ليكن $C^r([0,1],K)$ فضاء التطبيقات من $[0,1]$ نحو K التي تقبل مشتقات مستمرة حتى الرتبة r (حيث $r\in N$).

نزود هذا الفضاء بعائلة أنصاف النظيمات التالية : $P_i(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|f^{(i)}(t)\right|$ حيث: $i = 0,...,r$.

2- ونفس الشيء بالنسبة لـ $C^r([0,1]^n,K)$ فضاء التطبيقات المعرفة على $[0,1]^n$ والتي تأخذ قيمها في K، والتي تقبل مشتقات جزئية مستمرة حتى الرتبة r، حيث أننا نزوده بعائلة أنصاف النظيمات التالية: $P_i(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]^n}\left|D^i f(t)\right| : |i|\le r$.

3- نشير بـ $C^\infty([0,1]^n,K)$ لفضاء التوابع التي تقبل ما لا نهاية من المشتقات والمعرفة على $[0,1]^n$ وتأخذ قيمها في K .

نزود هذا الفضاء بعائلة أنصاف النظيمات التالية: $P_i(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]^n}\left|f^{(i)}(t)\right|$.

4- ليكن K متراصا في R^n، نشير بـ $D^r_K(R^n,K)$ إلى فضاء التطبيقات المعرفة على R^n والتي تأخذ قيمها في K والتي تقبل مشتقات جزئية مستمرة حتى الرتبة r وذات حوامل منعدمة خارج المتراص K.

نزود هذا الفضاء بعائلة أنصاف النظيمات التالية $P_i(f)=\sup\limits_{t\in R^n}\left|D^i f(t)\right|$

ونعرف بطريقة مشابهة الفضاء $D_K([0,1]^n,K)$.

5- ليكن X فضاء طبولوجيا منفصلا، من أجل كل متراص $K\subset X$، كل $f\in C(X,K)$ هي محدودة على K . نضع: $P_K(f)=\sup\limits_{x\in K}\left|f(x)\right|$.

P_K هو نصف نظيم على $C(X,K)$.

الـ P -طبولوجيا المعرفة بعائلة الـ P_K تدعى طبولوجية التقارب المنتظم على كل متراص
(convergence uniforme compacte) .

6- ليكن A مفتوحا من R^n وليكن $r \in N$، نشير بـ $E^r(A,K)$ للفضاء الشعاعي الجزئي من $C(A,K)$ المشكل من التوابع التي تقبل مشتقات جزئية مستمرة حتى الرتبة r.

من أجل كل متراص $K \subset A$ نضع: $P_{K,i}(f) = \sup\limits_{t \in K} \left| D^i f(t) \right|$.

الطبولوجيا المعرفة على $E^r(A,K)$ بعائلة أنصاف النظيمات $P_{K,i}$ تدعى طبولوجية التقارب المتراص من أجل كل المشتقات من الرتبة أقل أو يساوي من r .

(Topologie de la convergence compacte pour toutes les dérivées d'ordre $\leq r$) .

وبطريقة مشابهة نعرف طبولوجية $E^{\infty}(A,K)$.

7- نشير بـ $D^r(R^n,K)$ للفضاء الشعاعي الجزئي من $C(R^n,K)$ المشكل من التوابع المتراصة الحامل والتي تقبل مشتقات جزئية مستمرة حتى الرتبة r.

نعرف طبولوجية هذا الفضاء بواسطة عائلة أنصاف النظيمات التالية: $P_{\varphi,i}(f) = \sup\limits_{t \in R^n} \left| \varphi(t) D^i f(t) \right|$ حيث: $|i| \leq r$ و φ عنصر كيفي من $C(R^n,K)$.

نستطيع تعريف بطريقة مشابهة طبولوجية الفضاء $D^{\infty}(R^n,K)$.

8- ليكن X فضاء طبولوجيا متراصا، عناصر ثنوي $C(X,R)$ المزود بطبولوجيا التقارب المنتظم تدعى قياسات رادون الحقيقية (mesures de Radon réelles)

وأشهر هذه القياسات هي قياسات لوبيغ (la mesure de Lebesgue) المعرفة على $[0,1]$ المعرفة بالشكل الخطي المستمر التالي: $f \rightarrow \int_0^1 f(t)dt$.

- عناصر ثنوي $D^r(R^n,R)$ تدعى التوزيعات الحقيقية ذات الرتبة r وهي حالات خاصة من توزيعات شوارتز (L-Schwartz) .

- التوزيعات ذات الرتبة 0 هي قياسات رادون على R^n.

الخلاصة

حاولنا من خلال هذا العمل المتمثل في تقديم مجموعة من التعاريف والخصائص المتعلقة بنظرية الفضاءات الشعاعية الطبولوجية أن نوضح أهمية إختيار طبولوجيا منسجمة على فضاء شعاعي.

إن دراسة مثل هذه الفضاءات (أي الـ ف ش ط) تتطلب الدراية الكافية للمفاهيم العامة المتعلقة بالفضاءات الطبولوجية والفضاءات الشعاعية.

نسمي فضاء ش ط على الحقل K، المجموعة E المزودة ببنية فضاء شعاعي وبنية فضاء طبولوجي τ والمحققة للشرطين التاليين:

1) التطبيق $(x,y) \to x+y$ من $E \times E$ نحو E مستمر.

2) التطبيق $(\lambda,x) \to \lambda x$ من $K \times E$ نحو E مستمر.

من الشرط 1 نجد أن التطبيق $y \to x+y$ من E نحو E تقابل مستمر تطبيقه العكسي $z \to z-x$ هو كذلك مستمر، إذن التطبيق $y \to x+y$ هو هميومورفيزم من E نحو E يسحب النقطة O الى النقطة x، ولما كانت صورة الجوار V وفق هذا التطبيق هي $x+V$ فإننا نلاحظ أن جوارات x هي معرفة بواسطة الانسحابات انطلاقا من جوارات O، إذن في فضاء شعاعي طبولوجي جوارات نقطة كيفية x من E نحصل عليها إنطلاقا من معرفة النقطة O.

من الشرط 2 نجد أن التطبيق $\lambda \to \lambda x$ من K نحو E مستمر، نفسر هذا الإستمرار عند النقطة O. ليكن V جوارا كيفيا لـ O، يوجد عدد حقيقي $k>0$ بحيث العلاقة $|\lambda| \le k$ تجعل $\lambda x \in V$، وهذا ما يثبت أن كلّ جوار لـ O ماص.

من الشرط الثاني: التطبيق $x \to \lambda x$ من E نحو E مستمر،وإذا كانت $\lambda \neq 0$ فهو تقابلي وتطبيقه العكسي $x \to \lambda^{-1} x$ هو كذلك مستمر إذن من أجل كلّ $\lambda \neq 0$ التطبيق $x \to \lambda x$ هوميومورفيزم يسحب النقطة O إلى O ولما كانت صورة V هي λV ينتج أن كلّ متحاك ذو نسبة $\lambda \neq 0$ هو جوار لـ O كذلك.

نصف نظيم على فضاء شعاعي E هو تطبيق من E نحو R^+ بحيث من أجل كلّ x,y من E و λ من K لدينا:

$$1)P(\lambda x)=|\lambda|P(x)$$
$$2)P(x+y)\le P(x)+P(y)$$

نقول عن P إنه نظيم إذا كان $P(x)\neq 0$ من أجل $x\neq 0$.

نسمي P -كرة مفتوحة ذات مركز a من E كلّ مجموعة $\{x: P(x-a)<\rho\}$ حيث $0<\rho$.

لتكن $P=(P_i)$ عائلة من أنصاف النظيمات على E. نسمي P-كرة مفتوحة ذات مركز a في E كلّ تقاطع منته لـ P_i -كرات مفتوحة ذات مركز a.

نسمي P-طبولوجيا على E، كلّ طبولوجيا تكون مفتوحاتها هي الإتحادات الكيفية لـ P-كرات مفتوحة.

الخاتمة

ما يسعنا أن نقول في هذا المقام إلاّ أننا نرجو أن نكون قد وفّقنا ولو بالقدر الضئيل لأن نترك بصمة مضيئة نودها ضمن صفحات العام تدل على أننا في زمن سوف يمضي كنّا طلبة علم، أحببنا الرياضيات فاخترناها علما درسناه، ومهنة سوف نتبناها بإذن الله.

الأكيد في الأمر، أنه سيكون ممن يأتي بعدنا من طلبة من سيطلع على هذه المذكرة،فنرجو منهم أن لا يبخلوا في تصحيح الأخطاء إن صادفتهم.

وختام هذا العمل نوده تشجيعا وتحفيزا للطلبة على إختيار مادة الرياضيات كميدان لاستثمار إمكانياتهم العقلية،وقدراتهم الإبداعية.

لا ننسى أن نشير إلى أننا نتشرف ونسعد لكوننا درسنا في المدرسة العليا للأساتذة على يد أساتذتها الكرام وإلى كوننا سوف نساهم بإذن الله في المستقبل القريب في إعداد أجيال الجزائر الحبيبة، فنرجوا من الله التوفيق وآخر الكلام سلام الله عليكم.

دليل المصطلحات

-أ-

Réunion	اتحاد
Trace	أثر
Inclusion	احتواء
Base	أساس
Fondamental	أساسي
Translation	انسحاب

-ت-

Fonction	تابع
Compléments	تتمة
Sous- Additif	تحت جمعي
Récurrence	تراجع
Application	تطبيق
Définition	تعريف
Bijection	تقابل
Intersection	تقاطع
Dilatation	تمديد

-ث-

Dual	ثنوي

-ج-

Partie	جزء
Système	جملة
Voisinage	جوار

-ح-

Corps	حقل
Neutre	حيادي

	-خ-
Propriété	**خاصية**
Vide	**خالٍ**
Linéaire	**خطي**
	-د-
Intérieur (d'un ensemble)	**داخلية (مجموعة)**
	-ش-
Condition	**شرط**
Forme Linéaire	**شكل خطي**
	-ط-
Topologie	**طبولوجيا**
Topologie Produit	**طبولوجيا الجداء**
	-ع-
Famille	**عائلة**
Complexe	**عقدي**
Opération	**عملية**
Elément	**عنصر**
Inversement	**عكسيا**
Contraposé	**عكس النقيض**
	-غ-
Enveloppe	**غلاف**
	-ف-
Ecart	**فارق**
Espace	**فضاء**
- vectoriel	**- شعاعي**
- topologique	**- طبولوجي**
- séparé	**- منفصل**
- localement Convexe	**- محدب محليا**
	-ق-
Dénombrable	**قابل للعد**
Séparable	**قابل للانفصال**
Maîtrisable	**قابل لمسافة**

Disque de l'unité	قرص الوحدة
Proposition	قضية
	- ك -
Boule	كرة
	- م -
Absorbant	ماص
Suite	متتالية
Homogène	متجانس
Homothétique	متحاك
Compact	متراص
Symétrique	متناظر
Equilibré	متوازن
Ensemble	مجموعة
Convexe	محدب
Borné	محدود
Totalement borné	محدود كليا
Cône	مخروط
Continu	مستمر
Axiome	مسلمة
Dérivée	مشتق
Fermé	مغلق
Ouvert	مفتوح
Adhérence	ملاصقة
Compatible	منسجم
Séparé	منفصل
	- ن -
Semi-norme	نصف نظيم
Norme	نظيم

المراجع

باللغة العربية

1. محمد حازي، *المختصر في الطبولوجيا*؛ ديوان المطبوعات الجامعية، 1994.

الرقم في المكتبة العامة: SA2797.

باللغة الفرنسية

2. Aktilov. G, Kantorivitch.L, *Analyse fonctionnelle*, Edition Mir, 1981.

الرقم في مكتبة قسم الرياضيات:214.013

3. Bourbaki. N, *Eléments de mathématiques, Fascicule XIX, livre V, Espaces vectoriels topologiques*, Hermann Paris, 1955.

الرقم في مكتبة قسم الرياضيات: 211.034

4. Choquet. G, *Cour d'analyse, TomeII Topologie*, masson, 1964.

الرقم في المكتبة العامة:S 5080

5. Dieudonné. J, *Eléments d'analyse*, Gauthier - Villars Paris, 1969.

الرقم في مكتبة قسم الرياضيات: 212.104

6. Garsoux. J, *Espaces vectoriels topologiques et distributions,* Dunod, 1963.

الرقم في مكتبة قسم الرياضيات: 213.014

7. Kolomogrov. A, Fomine. C, Elément de la théorie des fonctions et de l' analyse fonctionnelle, Edition Mir,

الرقم في مكتبة قسم الرياضيات: 214.075

8. Vo-Khac. K*, Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivés partiels,* Tome1, Vuibert, 1972.

الرقم في مكتبة قسم الرياضيات: 214.047 ، الرقم في المكتبة العامة: S5695

باللغة الإنكليزية:

9. Probestson. A, Robertson. W. J, *Topological vector spaces,* Cambridge university press, 1973.

الرقم في مكتبة قسم الرياضيات: 216.028

10. Wilansky.A; *Modern method topological vector spaces;* Acgranhill, 1978.

الرقم في مكتبة قسم الرياضيات : 218.023