

N° d'ordre : /2007-M/MT

Remerciements

Nous tenons à remercier tout d'abord , ■■■■ seigneur le tout puissant de l'univers ,qui a permis que ce travail voit la lumière.

A lui toute louange

La presentation de ce modeste travail nous offre l'opportunité d'exprimer notre gratitude et reconnaissance à notre encadreur AZEB A.AZIZE pour son suivi et ses judicieux conseils qui nous ont permis de mener à bien notre mémoire .

Nous exprimons notre sympathie et nous vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin l'élaboration de cet ouvrage, qu'ils soit tous assurés de notre profonde reconnaissance et trouvent dans ces mots

L'expression de nos sincères remerciements

En fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période préparation .

Table des matières

Notation	1
Introduction générale	1
1 Les fonctions de Bessel : types et définitions	3
1.1 Fonctions de Bessel de première espèce	3
1.1.1 Fonction de Bessel d'ordre N	3
1.1.2 Fonction de Bessel d'ordre entier	5
1.2 Fonctions de Bessel d'ordre quelconque	6
1.2.1 Fonction Gamma	6
1.2.2 Equation différentielle	8
1.3 Fonctions de Bessel de deuxième espèce	8
1.3.1 Fonctions de Neumann d'ordre quelconque	8
1.3.2 Fonctions de Neumann d'ordre entier	9
1.4 Fonctions de Bessel de troisième espèce	10
2 Représentation de quelques fonction de Bessel	13
2.1 Représentation intégrable	13
2.2 Développements des fonctions de Bessel	14
2.2.1 Séries infinies	14
2.3 Représentations asymptotique	18
2.3.1 Relations de récurrence	19
2.4 Transformation de Fourier-Bessel	22

3 Applications	24
3.1 Pendule de Bessel	24
3.1.1 Equation du pendule de longueur variable	25
3.1.2 Equation de Bessel	25
3.1.3 Résolution avec les conditions initiales	26
3.2 modulation de fréquence	27
Bibliographie	29

Notation

Γ	<i>La fonction Gamma</i>
Ψ	<i>Fonction Digamma</i>
$B(x, w)$	<i>La fonction Beta</i>
\ln	<i>logarithme Nibire</i>
J_m	<i>La fonction Bessel</i>
N_m	<i>La fonction de Neumann</i>
$H_m^{(1,2)}$	<i>La fonction de Hankel</i>
$I_m(x)$	<i>La fonction de Bessel modifiée</i>
$K_m(x)$	<i>La fonction de Bessel modifiée</i>
$j_i(x)$	<i>La fonction de Bessel sphérique</i>
$n_i(x)$	<i>La fonction de Bessel sphérique</i>
$h_i^{(1,2)}(x)$	<i>La fonction de Bessel sphérique</i>
γ	<i>La constanted'Euler</i>
$\gamma(\alpha, x)$	<i>La fonction normalisée</i>
C^∞	<i>Espace des fonctions de classe C^∞</i>
∇	<i>Gradient</i>
Δ	<i>Laplacien</i>
$G(r, r_0, \theta - \theta_0, \tau)$	<i>La fonction de Green</i>

Introduction générale

Les fonctions de Bessel sont connues depuis le 18 ème siècle, quand les mathématiciens et les scientifiques ont commencé à décrire les processus physiques par des équations différentielles. De nombreux procédés différents prospectifs répondent aux mêmes équations aux dérivées partielles. Ces équations ont été nommés Laplace, d'Alembert (vague), Poisson Helmholtz et de la chaleur (diffusion) équations. Différentes méthodes ont été utilisées pour étudier ces équations. Le plus puissant est la séparation de la méthode de variables, qui en coordonnées polaires conduit souvent à des équations différentielles ordinaires de la structure particulière:

$$w''(z) z^2 + w'(z) z + (z^2 - v^2)w(z) = 0$$

Cette équation avec des valeurs concrètes du paramètre apparu dans les articles de FW Bessel (1816, 1824) qui a construit deux solutions partielles et de l'équation précédente sous la forme de la série:

$$w(z) = z^v \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + z^{-v} \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j = z^v \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} \right) + z^{-v} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} z^{2k+1} \right)$$

En remplaçant la série dans l'équation différentielle produit les solutions suivantes:

$$w_1(z) = z^v \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{2k} \quad / \quad A_0 = \frac{2^{-v}}{\Gamma(v+1)} \wedge A_1 = \frac{2^{-v-2}}{\Gamma(v+2)} \wedge A_k = a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{-v-2k}}{\Gamma(k+v+1)k!}$$

$$w_2(z) = z^{-v} \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^{2k} \quad / \quad B_0 = \frac{2^v}{\Gamma(v+1)} \wedge B_1 = \frac{2^{v-2}}{\Gamma(v+2)} \wedge B_k = b_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{v-2k}}{\Gamma(k-v+1)k!}$$

O. Schlömilch (1857) a utilisé les fonctions de Bessel de noms pour ces solutions, E. Lommel (1868) a examiné v comme un paramètre réel arbitraire, et H. Hankel (1869) considérées comme des valeurs complexes pour v .

Les deux solutions indépendantes de l'équation différentielle ont été notées comme $J_v(z)$ et $J_{-v}(z)$. Pour l'index entier v , les fonctions $J_v(z)$ et $J_{-v}(z)$ coïncident où avoir différents signes. Dans ce cas, la deuxième solution linéaire indépendante de l'équation différentielle précédente a été introduite par CG Neumann (1867) comme le cas limite de la combinaison linéaire spéciale suivante des fonctions $J_v(z)$ et $J_{-v}(z)$:

$$Y_v(z) = \lim_{\mu \rightarrow v} \frac{\cos(\mu\pi)J_\mu(z) - J_{-\mu}(z)}{\sin(\mu\pi)} \quad / \quad v \in \mathbb{Z}$$

J. Watson (1867) a introduit la notation pour cette fonction. D'autres auteurs (H. Hankel (1869), H. Weber (1873), et L. Schläfli (1875)) ont étudié ses propriétés. En particulier, la solution générale de l'équation différentielle précédente pour toutes les valeurs du paramètre peut être présentée par la formule:

$$w''(z) z^2 + w'(z) z + (z^2 - v^2)w(z) = 0 \quad ; \quad w(z) = c_1 J_v(z) + c_2 Y_v(z)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

De la même manière, AB Basset (1888) et HM Mac Donald (1899) a introduit les fonctions de Bessel modifiées $I_v(z)$ et $K_v(z)$, qui satisfait l'équation différentielle de Bessel modifiée

$$w''(z) z^2 + w'(z) z - (z^2 + v^2)w(z) = 0 \quad ; \quad w(z) = c_1 I_v(z) + c_2 K_v(z)$$

la première équation différentielle peut être converti en le dernier en modifiant la variable indépendante z à iz .

Dans le premier chapitre, nous présentons les fonctions de base de Bessel et leurs propriétés, nous discutons également sur différent type de fonctions de Bessel.

Dans le deuxième chapitre, nous discutons également sur le représentation intégrable de quelques fonctions de Bessel, les développements (séries infini, forme asymptotique), relation de récurrence, transformation de Fourier-Bessel.

En fin, dans le troisième chapitre, nous présentons une sélection de problèmes (avec solutions) portant sur les applications des fonctions de Bessel.

Chapitre 1

Les fonctions de Bessel : types et définitions

Introduction

En mathématiques, et plus précisément en analyse, les fonctions de Bessel découvertes par le mathématicien suisse DANIEL Bernouli, portent le nom du mathématicien allemand Friedrich Bessel, qui développa l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernouli. Ces fonctions sont des solutions canoniques $Y(x)$ de l'équation différentielle de Bessel.

1.1 Fonctions de Bessel de première espèce

1.1.1 Fonction de Bessel d'ordre N

La fonction $J_n(z)$, connue sous le nom de "fonction de Bessel d'ordre n de première espèce", est définie, lorsque n est un entier positif, par la série de puissance [voir le paragraphe **2.2.1**]
[4]

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n n!} \left(1 - \frac{z^2}{2 \cdot (2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \dots \right) = \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!(n+i)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2i} \quad (1.1.1)$$

qui converge pour toutes valeurs de z réelle ou complexes, et pour $n = 0$ on a

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (1.1.2)$$

qui connue sous le nom de fonction de Bessel d'ordre zéro.

Nous définissons les séries de Bessel comme étant

$$J_n(x) = \frac{z^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right]$$

cette série de puissance est une solution d'une équation différentielle que l'on retrouve assez fréquemment en physique, Posons

$$y = J_n(z) 2^n n! = z^n - \frac{z^{n+2}}{2(2n+2)} + \frac{z^{n+4}}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots$$

et on dérive ainsi

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dy}{dz} \right) = n^2 z^n - \frac{(n+2)^2 z^{n+2}}{2 \cdot (2n+2)} + \frac{(n+4)^2 z^{n+4}}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots$$

mais nous avons aussi

$$n^2 y = n^2 z^2 - \frac{n^2 z^{n+2}}{2(2n+2)} + \frac{n^2 z^{n+4}}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots$$

par soustraction

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dy}{dz} \right) - n^2 y = -z^{n+2} + \frac{z^{n+4}}{2(2n+2)} - \dots = -z^2 y$$

Ce qui donne finalement

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dy}{dz} \right) - (z^2 - n^2) y = 0$$

ce qui s'écrit également

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2) y = 0$$

qui est appelé l'équation différentielle de Bessel d'ordre n , on plus simplement équation de Bessel.

1.1.2 Fonction de Bessel d'ordre entier

On considère la fonction génératrice suivante définie comme suit [4]

$$G(z, t) = e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} \quad (1.1.3)$$

on a

$$e^{\frac{z}{2}t} = \sum_{j \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^j \frac{t^j}{j!} \quad \text{et} \quad e^{-\frac{z}{2}\frac{1}{t}} = e^{-\frac{z}{2}t^{-1}} = \sum_{i \geq 0} \left(-\frac{z}{2}\right)^i \frac{t^{-i}}{i!}$$

On écrit

$$G(z, t) = \sum_{j \geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^j \frac{t^j}{j!} \times \sum_{i \geq 0} \left(-\frac{z}{2}\right)^i \frac{t^{-i}}{i!} = \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i z^{i+j} t^{j-i}}{2^{i+j} i! j!}$$

Maintenant, on posant $j = i + n$ et $-\infty \leq n \leq +\infty$ on trouve

$$G(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i z^{2i+n}}{2^{2i+n} i! (i+n)!} \right\} t^n$$

en comparant les coefficients de la série précédente avec l'expression (1.1.1) on obtient

$$G(z, t) = e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n, \quad (1.1.4)$$

de (1.1.3) et (1.1.4) on trouve

$$G(z, t) = G(z, -t) = G(z, -t^{-1})$$

donc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \left(\frac{-1}{t}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) (-1)^n t^{-n}. \quad (1.1.5)$$

Maintenant, en mettant $m = -n$, on écrit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{-m}(z) (-1)^m t^{-m}$$

Maintenant, on pose $m = -n$ de la série sur le côté droit, ce qui donne

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(z) (-1)^n t^{-n}$$

donc, de ce qui précède on peut définir une fonction de Bessel d'ordre n de première espèce $J_n(z)$, lorsque n est un entier négatif comme suit

$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$$

Relations de récurrence

En utilisant (1.1.1), on a, après des calculs élémentaires et pour $n \geq 0$ [4]

$$(z^n J_n(z))' = z^n J_{n-1}(z) \quad \text{et} \quad (z^{-n} J_n(z))' = -z^{-n} J_{n+1}(z)$$

On en déduit, effectuant la dérivation

$$J_n'(z) + \frac{n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z), \quad J_n'(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = -J_{n+1}(z)$$

d'où les relations de récurrence

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) \quad \text{et} \quad J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z) \quad (1.1.6)$$

la première relation de (1.1.6) permet d'exprimer J_n en fonction de J_0 et J_1 .

1.2 Fonctions de Bessel d'ordre quelconque

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante [6]

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

quand la partie réelle de x est strictement positive, $\text{Re}(x) > 0$.

La formule d'Euler donne une expression de la fonction Γ pour toute valeur de x complexe hormis les valeurs de x entières négatives où la fonction possède des pôles

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \quad (1.2.1)$$

En intégrant par parties l'équation (??), on peut facilement montrer que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (1.2.2)$$

en vérifiant que $\Gamma(1) = 1$, on obtient par récurrence que

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (1.2.3)$$

avec cette définition, la fonction Γ apparaît comme un prolongement analytique de la fonction factorielle définie sur \mathbb{N} . D'après l'équation (1.2.1), la fonction Γ a un pôle en 0 et pour toutes les valeurs entières négatives. La formule suivante permet de relier la fonction entre les valeurs situées dans le demi-plan complexe où $\text{Re}(x) > 1$ et celui où $\text{Re}(x) < 1$

$$\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\Gamma(x) \sin(\pi x)} \quad (1.2.4)$$

pour calculer numériquement la fonction Γ pour une valeur de x en dehors des pôles, il est nécessaire de développer cette fonction sur la base des polynômes et des exponentielles. La formule la plus précise est celle de Lanczós. Ce développement est spécifique à la fonction Γ . La formule qui s'inspire de la formule stirling bien connue pour la fonction factorielle n'est valable que pour $\text{Re}(x) > 0$ et est donnée par

$$\Gamma(x+1) = \left(x + \gamma + \frac{1}{2}\right)^{x+\frac{1}{2}} e^{-(x+\gamma+\frac{1}{2})} * \sqrt{2\pi} \left[c_0 + \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x+2} \dots \frac{c_N}{x+N} + \epsilon \right] \quad (1.2.5)$$

Où ϵ est la paramètre estimant l'erreur. Pour le choix particulier $\gamma = 5, N = 6$ et c_0 très voisin de 1, on a $|\epsilon| < 2.10^{-10}$.

Il est difficile de calculer la fonction Γ pour des valeurs de x un peu importantes. Cela résulte de la croissance très rapide de la fonction Γ . On peut montrer que la fonction Γ croit plus vite que toute exponentielle, comme de manière Analogue on montre que l'exponentielle croit plus vite que tout polynôme. On dit parfois que la fonction Γ a une croissance super exponentielle Dans de nombreuses formules, la fonction Γ apparaît à la fois au numérateur et au dénominateur d'une expression. Chacun des termes peut être très important, mais le rapport est souvent un nombre relativement modeste. Pour calculer Numériquement ce type d'expression, il est préférable de calculer $\ln(\Gamma(x))$. Ainsi la fraction est alors l'exponentielle de la différence de deux Logarithmes. Tous les nombres qui interviennent dans ce calcul sont exponentiellement plus petits que ceux qui apparaissent dans un calcul direct, on évite ainsi le dépassement de capacité de l'ordinateur.

1.2.2 Equation différentielle

Lorsque n est remplacé dans(1.1.1) par un nombre complexe v quelconque ou $\operatorname{Re} v > 0$, on introduit la fonction de Bessel de première espèce d'ordre quelconque on obtient [4]

$$J_V(z) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{(-1)^\mu}{\mu! \Gamma(v + \mu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2\mu}, \quad |\arg z| < \pi$$

On vérifie facilement que, pour chaque $v \notin \mathbb{Z}$, J_v et J_{-v} sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - v^2) u = 0 \quad (1.2.6)$$

car le wronskien de deux solutions u_1, u_2 de (1.2.6) s'écrit $w(u_1, u_2)(z) = C z^{-1}$ où C est une constante. Ici :

$$W(J_v, J_{-v})(z) = -\frac{2 \sin v\pi}{\pi z}$$

Les relations(1.1.6)sont valables pour J_v où $u, v \in \mathbb{C}$. Le saut de J_v sur la coupure $]-\infty, 0]$ est donné par

$$J_v(-x + i 0) - J_v(-x - i 0) = 2i \sin(v\pi) J_v(x), \quad x > 0$$

1.3 Fonctions de Bessel de deuxième espèce

1.3.1 Fonctions de Neumann d'ordre quelconque

Introduisons les fonctions de Bessel de deuxième espèce notées $N_v(z)$ et définies dans $\mathbb{C} -]-\infty, 0]$ par [4]

$$N_v(z) = \frac{J_v(z) \cos v\pi - J_{-v}(z)}{\sin v\pi} \quad (1.3.1)$$

La fonction N_v est bien solution de (1.2.6) pour $v \notin \mathbb{Z}$, pour de telles valeurs de v , les fonctions J_v et N_v sont linéairement indépendantes, car

$$W(J_v, N_v)(z) = \frac{2}{\pi z}$$

1.3.2 Fonctions de Neumann d'ordre entier

Lorsque v est un entier, le second membre de (1.3.1) devient indéterminé. On définit alors $N_n(z)$ comme limite [4]

$$N_n(z) = \lim_{v \rightarrow n} N_v(z), n \geq 0 = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial J_v(z)}{\partial v} \Big|_{v=n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \Big|_{v=n} \right\}$$

d'après la règle de L'Hopital, on a

$$\frac{\partial J_v(z)}{\partial v} \Big|_{v=n} = \sum_{\mu \geq 0} \frac{(-1)^\mu}{\mu! (n + \mu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\mu} \left\{ \log \frac{z}{2} - \Psi(\mu + n + 1) \right\}$$

où $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$.

De même

$$\frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} = \sum_{\mu \geq 0} \frac{(-1)^\mu}{\mu! \Gamma(\mu - v + 1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-v+2\mu} \left\{ -\log \frac{z}{2} \Psi(\mu - v + 1) \right\}$$

Mais, pour $0 \leq \mu \leq n - 1$, on a $\Gamma(\mu - v - 1) \rightarrow \infty$, $\Psi(\mu - v + 1) \rightarrow \infty$ lorsque $v \rightarrow n$, à l'aide des formules

$$\Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \Psi(z) - \Psi(1 - z) = -\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow n} \frac{\Psi(\mu - v + 1)}{\Gamma(\mu - v + 1)} &= \lim_{v \rightarrow n} \left[\frac{1}{\pi} \Gamma(v - \mu) \sin(\pi(v - \mu)) \{ \Psi(v - \mu) + \pi \cos(\pi(v - \mu)) \} \right] \\ &= (-1)^{n-\mu} (n - \mu - 1)!, \quad 0 \leq \mu \leq n - 1 \end{aligned}$$

il en résulte

$$\frac{\partial J_{-v}(z)}{\partial v} \Big|_{v=n} = (-1)^n \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{(n - \mu - 1)!}{\mu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu-n} + (-1)^n \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^\mu}{\mu! (n + \mu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\mu} \left[-\log \frac{z}{2} + \Psi(\mu + 1) \right] \quad (1.3.2)$$

On en déduit (1.3.2) car on peut écrire $\Psi(1) = -\gamma$, $\Psi(\mu + 1) = -\gamma + \sum \frac{1}{\lambda}$, $\mu \geq 1$. Ce développement fournit le comportement à l'origine de N_n

$$N_0(z) \sim \frac{2}{\pi} \log \frac{z}{2}, \quad N_n(z) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n \geq 1, \quad z \rightarrow 0$$

Un calcul un peu long, mais simple, montre que

$$\frac{d^m N_n(z)}{dz^m} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^m J_v z}{\partial z^m} \right) \Big|_{v=n} - (-1)^n \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^m J_{-v} z}{\partial z^m} \right) \Big|_{v=n} \right\}, \quad m \geq 0 \quad (1.3.3)$$

ce qui prouve, en particulier, que N_n est bien solution de (1.2.6) lorsque $v=n$. Les solutions J_n et N_n forment un système fondamental. En résumé, la fonction N_v est analytique dans $\mathbb{C} -]-\infty, 0]$ pour chaque $v \in \mathbb{C}$ et est fonction entière de v pour chaque z fixé. D'après (1.3.1), on a

$$N_v(-x + i0) - N_v(-x - i0) = 2i(J_v(x) \cos v\pi + J_{-v}(x)), \quad x > 0$$

1.4 Fonctions de Bessel de troisième espèce

On note $H_v^{(1)}(z)$ et $H_v^{(2)}(z)$, qu'on appelle fonction de Bessel de troisième espèce ou fonctions de Hankel, les fonctions définies par [4]

$$H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + iN_v(z) \quad \text{et} \quad H_v^{(2)}(z) = J_v(z) - iN_v(z) \quad \text{où} \quad z \in \mathbb{C} -]-\infty, 0], v \in \mathbb{C}$$

chaque $H_v^{(i)}$ ($i = 1, 2$) est une fonction entière de v pour z fixé. Le couple $(H_v^{(1)}, H_v^{(2)})$ constitue un système fondamental pour l'équation (1.2.6), car $W(H_v^{(1)}, H_v^{(2)})(z) = -\frac{4i}{\pi z}$. De même pour les couples $(J_v, H_v^{(1)})$ et $(J_v, H_v^{(2)})$ car, par exemple

$$W(J_v, H_v^{(2)})(z) = -\frac{2i}{\pi z}$$

De (1.3.1) et (1.3.3), on a

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{J_{-v}(z) - e^{-i\pi v} J_v(z)}{i \sin \pi v}, \quad H_v^{(2)}(z) = \frac{e^{i\pi v} J_v(z) - J_{-v}(z)}{i \sin \pi v} \quad (1.4.1)$$

il en résulte

$$H_{-v}^{(1)}(z) = e^{-i\pi v} H_v^{(1)}(z), \quad H_{-v}^{(2)}(z) = e^{-i\pi v} H_v^{(2)}(z) \quad (1.4.2)$$

Les fonctions de Bessel de deuxième et de troisième espèce satisfont les relations de récurrence (1.1.6) où $n = v \in \mathbb{C}$.

D'autre part, on a pour $x > 0$

$$\begin{aligned} H_v^{(1)}(-x + i0) - H_v^{(1)}(-x - i0) &= -2(J_{-v}(x) + e^{-iv\pi} J_v(x)) \\ H_v^{(2)}(-x + i0) - H_v^{(2)}(-x - i0) &= 2(J_{-v}(x) + e^{iv\pi} J_v(x)) \end{aligned}$$

Les fonctions $H_v^{(1)}$ et $H_v^{(2)}$ admettent respectivement les représentations intégrales

$$H_v^{(1)}(z) = \frac{2e^{-iv\pi}}{i\sqrt{\pi}\Gamma(v + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^v \int_1^{+\infty} e^{izt} (t^2 - 1)^{v-\frac{1}{2}} dt \quad \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \quad (1.4.3)$$

$$H_v^{(2)}(z) = -\frac{2e^{iv\pi}}{i\sqrt{\pi}\Gamma(v+\frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^v \int_1^{+\infty} e^{-izt} (t^2-1)^{v-\frac{1}{2}} dt \quad \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z < 0 \quad (1.4.4)$$

On démontre(1.4.3), de (1.4.4), on a pour $|\arg z| < \pi$

$$H_v^{(1)}(z) = -\frac{e^{-iv\pi}}{i\sin v\pi\Gamma(v+1)} e^{-iz} \left(\frac{z}{2}\right)^v \Phi\left(v+\frac{1}{2}, 2v+1; 2iz\right) + \frac{1}{i\sin v\pi\Gamma(-v+1)} e^{-iz} \left(\frac{z}{2}\right)^{-v} \Phi\left(-v+\frac{1}{2}, -2v+1; 2iz\right)$$

Mais de

$$(\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z), \gamma \notin -\mathbb{N}),$$

on a

$$\Phi\left(v+\frac{1}{2}, 2v+1; 2iz\right) = e^{2iz} \Phi\left(v+\frac{1}{2}, 2v+1; -2iz\right)$$

D'autre part, la fomule des compléments implique

$$\sin((v+1)\pi) \Gamma(v+1) = \frac{\pi}{\Gamma(-v)}, \sin(v\pi) \Gamma(1-v) = \frac{\pi}{\Gamma(v)}$$

donc

$$H_v^{(1)}(z) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} e^{i(z-v\pi)} (2z)^v \left[\frac{\Gamma(-v)}{\sqrt{\pi} 2^{2v}} \Phi\left(v+\frac{1}{2}, 2v+1; -2iz\right) + \frac{e^{iv\pi} \Gamma(v)}{\sqrt{\pi}} z^{-2v} \Phi\left(-v+\frac{1}{2}, -2v+2; -2iz\right) \right]$$

Comparant avec

$$\Psi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \Phi(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} \Phi(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma, z), \gamma \notin \mathbb{Z}, |\arg z| < \pi$$

où

$$\alpha = v + \frac{1}{2}, \gamma = 2v + 1,$$

on trouve

$$H_v^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\sqrt{\pi}} e^{i(z-v\pi)} (2z)^v \Psi\left(v+\frac{1}{2}, 2v+1; 2e^{-i\frac{\pi}{2}} z\right), \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi \quad (1.4.5)$$

De même

$$H_v^{(2)}(z) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} e^{-(z-v\pi)} (2z)^v \Psi\left(v+\frac{1}{2}, 2v+1; 2e^{i\frac{\pi}{2}} z\right) \quad -\pi < \arg z < \pi \quad (1.4.6)$$

La représentation

$$\Psi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\gamma-\alpha-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

fournit

$$\Psi\left(v + \frac{1}{2}, 2v + 1; -2iz\right) = \frac{1}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{2itz} t^{v-\frac{1}{2}} (1+t)^{v-\frac{1}{2}} dt, \quad \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0$$

D'où (1.4.3) après avoir fait le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{2}(t-1)$. On obtient de même (1.4.4) à partir de (1.4.6), de

$$k_v(z) = \begin{cases} i\frac{\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}v} H_v^{(1)}\left(ze^{i\frac{\pi}{2}}\right), & -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2} \\ -i\frac{\pi}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}v} H_v^{(2)}\left(ze^{-i\frac{\pi}{2}}\right), & -\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi \end{cases}$$

(1.4.3) et (1.4.4), on obtient pour la fonction de Macdonald

$$K_v(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^v \int_1^{+\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{v-\frac{1}{2}} dt \quad \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0.$$

Chapitre 2

Représentation de quelques fonction de Bessel

2.1 Représentation intégrable

La fonction de génération dans(1.1.3), peut être utilisé pour dériver une représentation intégrale d'une fonction de Bessel $J_n(z)$. La première étape est de mettre $t = \exp(\pm i\theta)$ dans (1.1.4), ce qui donne [4]

$$e^{\pm iz \sin \theta} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n [e^{ni\theta} + (-1)^n e^{-ni\theta}] J_n(z)$$

ou en termes de sinis et cosinis

$$e^{\pm iz \sin \theta} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\theta + \pm i \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(z) \sin(2n+1)\theta$$

Combinaisons appropriées de ces cas montrent que

$$\cos(z \sin \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\theta$$

$$\sin(z \sin \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(z) \sin(2n+1)\theta$$

et, en remplaçant $\eta = \frac{\pi}{2} - \theta$, on obtient

$$\cos(z \cos \eta) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) \cos 2n\eta \quad (2.1.1)$$

$$\sin(z \cos \eta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(z) \cos(2n+1)\eta \quad (2.1.2)$$

en multipliant (2.1.1) par $\cos m\eta$ et en intégrant de 0 à π , on trouve

$$\int_0^{\pi} \cos m\eta \cos(z \cos \eta) d\eta = \begin{cases} \pi J_m(z) & \text{pour } m \text{ pair} \\ 0 & \text{pour } m \text{ impair} \end{cases}$$

De même, on obtient de (2.1.2)

$$\int_0^{\pi} \sin m\eta \sin(z \cos \eta) d\eta = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \text{ pair} \\ \pi J_m(z) & \text{pour } m \text{ impair} \end{cases}$$

en ajoutant ces expressions nous donne la représentation intégrable de $J_n(z)$

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta \quad (2.1.3)$$

2.2 Développements des fonctions de Bessel

2.2.1 Séries infinies

On fixe l'entier n positif et on définit une suite de réels $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ par [3]

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k = \frac{(-1)^k}{4^k k! (n+k)!} \quad (2.2.1)$$

les termes sont tous non nuls et la règle de d'Alembert permet de calcul du rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = -\frac{1}{4(k+1)(n+k+1)} \quad (2.2.2)$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| = 0 \quad (2.2.3)$$

et le rayon de convergence est infini. La somme S_n de la série entière est une application de classe C^∞ définie sur \mathbb{R} . Les coefficients α_k satisfont à la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k + 4(k+1)(n+k+1)\alpha_{k+1} = 0 \quad (2.2.4)$$

soit

$$\alpha_k + 4(n+1)(k+1)\alpha_{k+1} + 4(k+1)k\alpha_{k+1} = 0 \quad (2.2.5)$$

et, en multipliant par t^k , il vient

$$\alpha_k t^k + 4(n+1)(k+1)\alpha_{k+1} t^k + 4tk(k+1)\alpha_{k+1} t^{k-1} = 0 \quad (2.2.6)$$

D'autre part, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad S_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k, \quad S'_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} t^k \quad \text{et} \quad S''_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1) a_{k+1} t^{k-1} \quad (2.2.7)$$

d'où, en sommant les relations (2.2.6)

$$S_n(t) + 4(n+1)S'_n(t) + 4tS''_n(t) = 0 \quad (2.2.8)$$

On définit alors une application K_n de \mathbb{R} dans lui-même par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad K_n(x) = x^n S_n(x^2) \quad (2.2.9)$$

Le monôme x^n et S_n sont de classe C^∞ , donc K_n également, avec

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad K'_n(x) &= nx^{n-1}S_n(x^2) + 2x^{n+1}S'_n(x^2) \\ K''_n(x) &= n(n-1)x^{n-2}S_n(x^2) + 2(2n+1)x^n S'_n(x^2) + 4x^{n+2}S''_n(x^2) \\ x^2 K''_n(x) + xK'_n(x) + (x^2 - n^2)K_n(x) &= x^{n+2}S_n(x^2) + 4(n+1)x^{n+2}S'_n(x^2) + 4x^{n+4}S''_n(x^2) \\ &= x^{n+2}[S_n(x^2) + 4(n+1)S'_n(x^2) + 4x^2S''_n(x^2)] = 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Donc K_n vérifie l'équation de Bessel sur \mathbb{R} , elle est proportionnelle à J_n

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0 \quad K_n(x) = \lambda J_n(x) \quad (2.2.11)$$

la définition

$$K_n(x) = x^n S_n(x^2) = x^n \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^{2k} \quad (2.2.12)$$

montre que K_n admet un développement en série entière dont le premier terme non nul est $\alpha_0 x^n$ donc

$$K_n^{(n)}(0) = n! \alpha_0 = 1 \quad (2.2.13)$$

et la première dérivée de K_n en 0 non nulle, pour déterminer λ il faut évaluer $J_n^{(n)}(0)$. Pour tout entier K on a

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) = (-\sin \varphi)^k \cos\left(n\varphi - x \sin \varphi + \frac{k\pi}{2}\right) \quad (2.2.14)$$

donc

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-\sin \varphi)^n \cos\left(n\varphi + \frac{n\pi}{2}\right) d\varphi \quad (2.2.15)$$

et, avec le changement de variable $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$, il vient

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^n \psi \cos(n\psi) d\psi \quad (2.2.16)$$

intégrale dans laquelle on intègre une fonction π -périodique: on peut donc intégrer sur une autre période voire sur 2 périodes et écrire

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n \varphi \cos(n\varphi) d\varphi \quad (2.2.17)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \cos^n \varphi \cos(n\varphi) &= \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^n \frac{e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-n)\varphi}\right) (e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k e^{i2k\varphi} + \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-2n)\varphi}\right) \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Mais $\int_0^{2\pi} e^{i.p\varphi} d\varphi$ vaut 0 si P est non nul et 2π si P est nul et il subsiste, en intégrant la somme précédente

$$J_n^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n \varphi \cos(n\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2^{n+1}} (2\pi + 2\pi) = \frac{1}{2^n} \quad (2.2.19)$$

Finalement il vient

$$\lambda = \frac{K_n^{(n)}(0)}{J_n^{(n)}(0)} = 2^n \text{ et } J_n(x) = \frac{1}{2^n} K_n(x) = \frac{x^n}{2^n} S_n(x^2) \quad (2.2.20)$$

fournit le développement en série entière, de rayon de convergence infini, des fonctions de Bessel

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_n(x) = \frac{x^n}{2^n} S_n(x^2) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (2.2.21)$$

Remarquons que tout le calcul est basé sur la valeur du rapport $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ et ne nécessite que n soit entier uniquement pour écrire les factorielles, n peut prolonger les résultats précédents

pour les fonctions de Bessel d'indice non entier en utilisant la fonction Γ et obtenir, pour ν non entier négatif

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (2.2.22)$$

aussi la fonction $J_{-m}(x)$ ce développe en série comme suite

$$J_{-m}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \quad (2.2.23)$$

Dans la limite lorsque $x \rightarrow 0$ la fonction de Bessel $J_m(x)$ est fini pour $m \geq 0$ et se comporte comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_m(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m \quad (2.2.24)$$

Toutes les autres fonctions divergent

$$\lim_{x \rightarrow 0} N_m(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\ln(\frac{x}{2}) + \gamma], m = 0, \\ -\frac{\Gamma(m)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^m, m \neq 0, \end{cases} \quad (2.2.25)$$

où $\gamma = 0,5772\dots$. Dans la limite lorsque $x \rightarrow \infty$ les fonctions $J_m(x)$, $N_m(x)$, $H_m^{(1)}(x)$, et $H_m^{(2)}(x)$ se comportent comme des

$$J_m(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.2.26)$$

$$N_m(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.2.27)$$

$$H_m^{(1)}(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (2.2.28)$$

$$H_m^{(2)}(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (2.2.29)$$

lorsque $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \infty$ limites sont données à ($m \geq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_m(x) \rightarrow \frac{x^m}{2^m \Gamma(m+1)} \quad (2.2.30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_m(x) \rightarrow \begin{cases} -[\ln(\frac{x}{2}) + \gamma], m = 0, \\ \frac{\Gamma(m)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^m, m \neq 0, \end{cases} \quad (2.2.31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_m(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad (2.2.32)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_m(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x} \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \quad (2.2.33)$$

2.3 Représentations asymptotique

Les représentations asymptotiques qui suivent décrivent le comportement des fonctions de Bessel et des fonctions de Bessel modifiées lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ pour v fixé, ce sont les fonctions de Hankel qui apparaissent les plus faciles à traiter, puisqu'on peut bénéficier directement du développement asymptotique de la fonction avec les notations suivantes [1]

$$(v, 0) = 1, \quad (v, u) = \frac{(-1)^u}{u!} \left(\frac{1}{2} - v\right)_u \left(\frac{1}{2} + v\right)_u, \quad u \geq 1 \quad (2.3.1)$$

$$H_v^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} \left\{ \sum_{u=0}^n (-1)^u (v, u) (2ix)^{-u} + 0 \left(\frac{1}{|x|^{n+1}}\right) \right\} \quad (2.3.2)$$

$$H_v^{(2)}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4})} \left\{ \sum_{u=0}^n u = 0^n (v, u) (2ix)^{-u} + 0 \left(\frac{1}{|x|^{n+1}}\right) \right\} \quad (2.3.3)$$

$|x| \rightarrow +\infty, \quad |\arg x| \leq \pi - \delta$

Remarques:

Le développement asymptotique de $H_v^{(2)}$ est obtenu en changeant i en $-i$ dans celui de $H_v^{(1)}$. A priori, le domaine de validité de (2.3.2) est $\delta \leq \arg x \leq \pi - \delta$, mais on peut l'étendre à $|\arg x| \leq \pi - \delta$ en considérant une intégrale de Laplace oblique pour définir la fonction. Même observation au sujet de (2.3.3) définir la fonction. Les formules des fonctions de Hankel

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(x) &= J_m(x) + iN_m(x) \\ H_m^{(2)}(x) &= J_m(x) - iN_m(x) \end{aligned}$$

associées aux précédentes donnent les développements asymptotiques respectifs de J_v et N_v et pour $|x| \rightarrow +\infty$, $|\arg x| \leq \pi - \delta$ on a

$$\begin{aligned} N_v(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{u=0}^n (-1)^u (v, 2u+1) (2x)^{-2u} + 0 \left(\frac{1}{|x|^{2n+3}}\right) \right] \\ &+ \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \sum_{u=0}^n (-1)^u (v, 2u) (2x)^{-2u} + 0 \left(\frac{1}{|x|^{2n+2}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

On en déduit le comportement asymptotique des fonctions modifiées, et pour $|x| \rightarrow +\infty$, $|\arg x| \leq \pi - \delta$ on a

$$\begin{aligned} I_v(x) &= e^x \left(\frac{1}{2\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{u=0}^n (-1)^u (v, u) (2x)^{-u} + 0 \left(\frac{1}{|x|^{n+1}}\right) \right] \\ &+ e^{-x+i\pi(v+\frac{1}{2})\varepsilon(x)} \left(\frac{1}{2\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{u=0}^n (v, u) (2x)^{-u} + 0 \left(\frac{1}{|x|^{n+1}}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1, \operatorname{Im} x > 0 \\ -1, \operatorname{Im} x < 0 \end{cases}$$

$$K_\nu(x) = e^{-x} \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{u=0}^n (v, u) (2x)^{-u} + 0 \left(\frac{1}{|x|^{n+1}}\right) \right\} \quad (2.3.5)$$

Formes asymptotiques des fonctions de Bessel sphériques sont données à

$$j_l(x) \rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2l+1)} + \dots\right), x \ll 1, \quad (2.3.6)$$

$$n_l(x) \rightarrow \frac{(2l+1)!!}{x^{l+1}} \left(1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \dots\right), x \ll 1$$

$$j_l(x) = \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{x}\right), x \gg 1,$$

$$n_l(x) = -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{x}\right), x \gg 1,$$

où

$$(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3)\dots 5.3.1$$

2.3.1 Relations de récurrence

L'idée est que, si trois applications F_1, F_2 et F_3 sont combinaisons linéaires de J_n et J'_n ces trois applications linéaires sont liées. Historiquement on a mis en évidence deux situations intéressantes [7]. La première concerne l'application K_n définie sur \mathbb{R}^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad K_n(x) = n \frac{J_n(x)}{x} - J'_n(x) \quad (2.3.7)$$

K_n est à priori de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* avec, pour tout x non nul

$$\begin{aligned} K'_n(x) &= -n \frac{J_n(x)}{x^2} + n \frac{J'_n(x)}{x} - J''_n(x) \\ &= -n \frac{J_n(x)}{x^2} + n \frac{J'_n(x)}{x} + \left[\frac{J'_n(x)}{x} + \frac{x^2 - x^2}{x^2} J_n(x) \right] \\ &= \frac{x^2 - n(n+1)}{x^2} J_n(x) + (n+1) \frac{J'_n(x)}{x} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} K''_n(x) &= 2 \frac{n(n+1)}{x^3} J_n(x) + \frac{x^2 - n(n+1)}{x^2} J'_n(x) - (n+1) \frac{J_n(x)}{x^2} + (n+1) \frac{J''_n(x)}{x} \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{x^3} J_n(x) + \frac{x^2 - n(n+1)}{x^2} J'_n(x) + \frac{(n+1)}{x} \left[-\frac{J'_n(x)}{x} - \frac{x^2 - n^2}{x^2} J_n(x) \right] \\ &= -n(n+1) \frac{x^2 - n^2 - 2n}{x^3} J_n(x) + \frac{x^2 - n^2 - 3n - 2}{x^2} J'_n(x) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} x^2 K_n''(x) + x K_n'(x) &= [x^2 - (n+1)^2] J_n'(x) - n \frac{x^2 - (n+1)^2}{x} J_n(x) \\ &= [x^2 - (n+1)^2] \left[J_n'(x) - n \frac{J_n(x)}{x} \right] = - [x^2 - (n+1)^2] K_n(x) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

K_n est donc solution, à x non nul, de l'équation de Bessel d'indice $n+1$. Or, si n est nul, K_n se réduit à $J_n'(x)$ donc se prolonge en une application de class C^∞ sur \mathbb{R} alors que, si n est non a

$$J_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi) d\varphi = 0 \quad (2.3.11)$$

D'où, pour x non nul, avec le changement de variable

$$\begin{aligned} t = xu J_n(x) &= \int_0^x J_n'(t) dt = \int_0^1 J_n'(xu) x du \\ \frac{J_n(x)}{x} &= \int_0^1 J_n'(xu) du \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Relation qui montre que $\frac{J_n(x)}{x}$ se prolonge en une application de classe C^∞ sur \mathbb{R} donc K_n également, par continuité est solution sur \mathbb{R} de l'équation de Bessel d'indice $n+1$ et est proportionnelle à J_{n+1}

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad K_n(x) = \lambda J_{n+1}(x) \quad (2.3.13)$$

Et comme dans le paragraphe précédant, on évalue λ par la première dérivée de J_{n+1} non nulle en 0 soit

$$K_n^{(n+1)}(0) = \lambda J_{n+1}^{(n+1)}(0) \quad (2.3.14)$$

La relation

$$K_n(x) = n \int_0^1 J_n'(xu) du - J_n'(x) \quad (2.3.15)$$

relation se dérive $n+1$ fois en

$$K_n^{(n+1)}(x) = n \int_0^1 u_n^{n+1} J_n^{(n+2)}(xu) du - J_n^{(n+2)}(x) \quad (2.3.16)$$

Et fournit

$$K_n^{(n+1)}(0) = n \frac{J_n^{(n+2)}(xu)}{n+2} - J_n^{(n+2)}(0) = -\frac{2}{n+2} J_n^{(n+2)}(0) \quad (2.3.17)$$

Le développement en série entière de J_n fournit

$$\frac{J_n^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} = -\frac{1}{2^{n+2}(n+1)!} \quad (2.3.18)$$

Alors que la première dérivée non nulle de J_{n+1} est

$$J_{n+1}^{(n+1)}(0) = \frac{1}{2^{n+1}} \quad (2.3.19)$$

On en déduit $\lambda = 1$ et la relation de récurrence valable pour tout entier n

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad J_{n+1}(x) = n \frac{J_n(0)}{x} - J_n'(x) \quad (2.3.20)$$

Ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad xJ_{n+1}(x) - nJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0 \quad (2.3.21)$$

Les relations écrites avec K_n et K_n' peuvent se reformuler en

$$\begin{aligned} J_{n+1}(x) &= n \frac{J_n(x)}{x} - J_n'(x) \\ J_{n+1}'(x) &= \frac{x^2 - n(n+1)}{x^2} J_n(x) + (n+1) \frac{J_n'(x)}{x} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Et fournissent au rang suivant

$$\begin{aligned} J_{n+2}(x) &= (n+1) \frac{J_{n+1}(x)}{x} - J_{n+1}'(x) \\ &= \frac{n+1}{x} \left[n \frac{J_n(x)}{x} - J_n'(x) \right] - \frac{x^2 - n(n+1)}{x^2} J_n(x) - \frac{n+1}{x} J_n'(x) \\ &= -\frac{x^2 - 2n(n+1)}{x^2} J_n(x) - 2 \frac{n+1}{x} J_n'(x) \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

En éliminant $J_n'(x)$ entre les valeurs obtenues pour $J_{n+1}(x)$ et $J_{n+2}(x)$ on voit que trois fonctions de Bessel d'indices consécutifs vérifient la relation de récurrence

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad xJ_{n+2}(x) - 2(n+1)J_{n+1}(x) + xJ_n(x) = 0 \quad (2.3.24)$$

Remplaçant dans cette dernière relation la valeur de obtenue par la première de récurrence, on obtient, pour tout entier.

2.4 Transformation de Fourier-Bessel

Avec des coordonnées polaires (r, θ) , une fonction à symétrie de révolution [5] (ou fonction radiale) dépend seulement de r

$$U(r, \theta) = g(r) \quad (2.4.1)$$

Avec des coordonnées cartésiennes (x, y) nous écrivons

$$U(r, \theta) = u(x, y) \quad (2.4.2)$$

Et ensuite

$$\hat{u}(F_x, F_y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) e^{2i\pi(xF_x + yF_y)} dx dy \quad (2.4.3)$$

$$= \int_0^\infty g(r) r dr \int_0^{2\pi} e^{2i\pi F r \cos(\theta - \Psi)} d\theta \quad (2.4.4)$$

Il est naturel d'utiliser des coordonnées polaires (F, Ψ) dans l'espace (plan) de Fourier, telles que

$$F_x = F \cos \Psi \quad \text{et} \quad F_y = F \sin \Psi \quad (2.4.5)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \hat{u}(F_x, F_y) &= \hat{u}(F \cos \Psi, F \sin \Psi) \\ &= \int_0^\infty g(r) r dr \int_0^{2\pi} e^{2i\pi F r \cos(\theta - \Psi)} d\theta \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

D'autre part, J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, on montre (2.4.7)

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ia \cos(\theta - \Psi)} d\theta \quad (2.4.7)$$

Et il vient

$$\hat{u}(F \cos \Psi, F \sin \Psi) = 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_0(2\pi F r) r dr \quad (2.4.8)$$

L'intégrale de la relation (2.4.8) ne dépend pas de Ψ ce qui signifie que la transformée de Fourier d'une fonction à symétrie de révolution possède elle aussi cette symétrie. la relation (2.4.8) se met sous la forme

$$G(F) = 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_0(2\pi Fr) r dr \quad (2.4.9)$$

La fonction G est la transformée Fourier-Bessel (ou transformée de Hankel d'ordre 0) de la fonction g . On détint une transformation de Fourier-Bessel inverse or on montre

$$g(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} G(p) J_0(2\pi pr) p dp \quad (2.4.10)$$

La transformation de Fourier-Bessel est sa propre inverse.

Remarque :

Si J_m est la fonction de Bessel de première espèce et ordre m , la transformation de Hankel d'ordre m . notée H_m est définie par [?]

$$H_m [g] (p) = 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_m(2\pi pr) r dr \quad (2.4.11)$$

On montre que H_m est sa propre inverse

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x J'_{n+1}(x) + (n+1) J_{n+1}(x) - x J_n(x) = 0 \quad (2.4.12)$$

Chapitre 3

Applications

3.1 Pendule de Bessel

Quand la longueur d'un pendule simple varie de manière affine: $l(t) = l_0 + vt$, on dit qu'il s'agit d'un pendule de Bessel, car la solution (pour de petites oscillations) s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel. Si v est faible, on retrouve l'invariant adiabatique $E(t)T(t)$ [2]

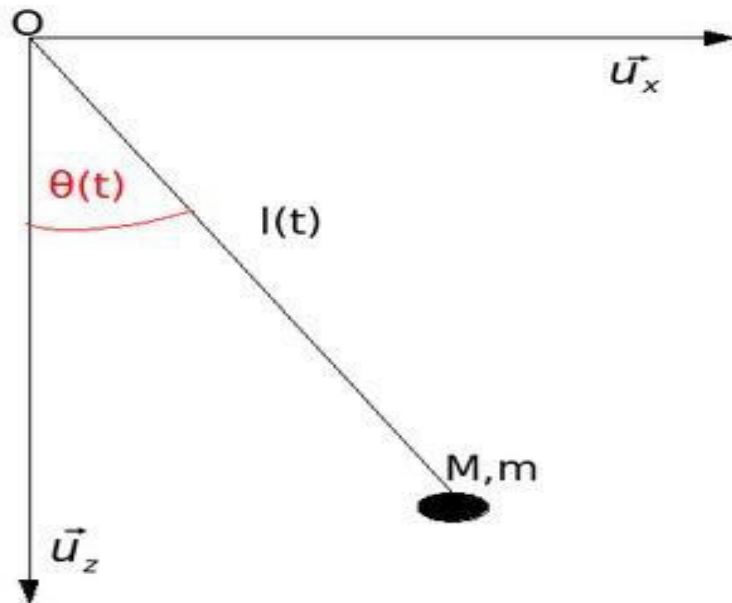


Figure 3.1. Le pendule simple de longueur variable

3.1.1 Equation du pendule de longueur variable

Le pendule simple de longueur variable a pour équation pour cette loi temporelle de $l(t)$ où sa dérivée seconde est nulle [2]

$$l(t)\ddot{x}(t) + g(t)x(t) = 0$$

Dans le cas habituel g est constant, revenons à la fonction angulaire: $\theta = \frac{x}{l}$

$$l(t)\ddot{\theta}(t) + 2v\dot{\theta}(t) + g\theta(t) = 0$$

Posons comme nouvelle variable sans unités: $u = g\frac{t}{v}$

$$l(u)\frac{g}{v}\ddot{\theta}(u) + 2\dot{\theta}(u) + \theta(u) = 0$$

Puis pour simplifier, posons comme longueur: $L = \frac{v^2}{g}$

$$\frac{l(u)}{l}\ddot{\theta}(u) + 2\dot{\theta}(u) + \theta(u) = 0$$

On reconnaît l'équation circuit RLC avec même variable linéairement, c'est un problème classique (voir obtention de champs magnétiques intenses). On peut encore transformer cette équation.

3.1.2 Equation de Bessel

On fait un nouveau changement de variable sans unités : $\alpha = 2\sqrt{\frac{l(u)}{l}}$

$$\alpha^2\ddot{\theta}(\alpha) + 2\frac{\dot{\theta}(\alpha)}{\alpha} + \theta(\alpha) = 0$$

On change de fonction $y(\alpha) = \alpha\theta(\alpha)$, et on finit par trouver une équation de Bessel avec $n = 1$.

Les solutions sont les fonctions de Bessel, fonctions classiques de la physique mathématique

$$y(\alpha) = A J_1(\alpha) + B Y_1(\alpha)$$

D'où

$$\theta(\alpha) = A \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} + B \frac{Y_1(\alpha)}{\alpha}$$

3.1.3 Résolution avec les conditions initiales

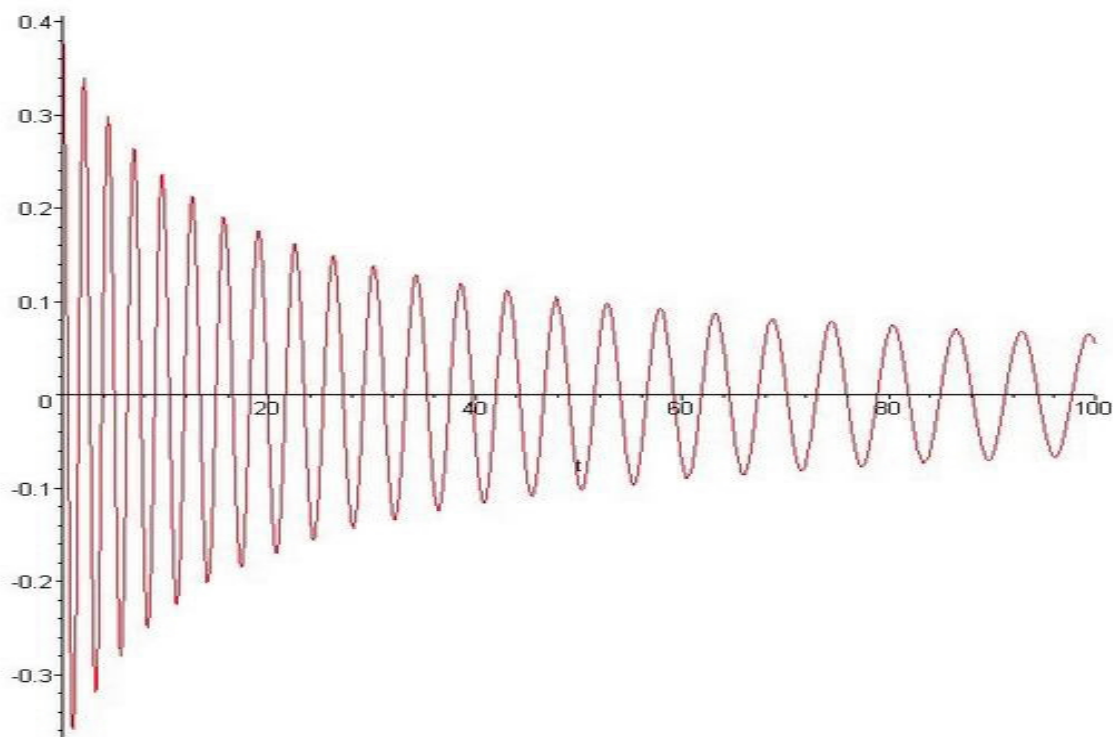
On résout ce système linéaire de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \theta(\alpha_0) = A \frac{J_1(\alpha_0)}{\alpha_0} + B \frac{Y_1(\alpha_0)}{\alpha_0} \\ \dot{\theta}(\alpha_0) = -A \frac{J_2(\alpha_0)}{\alpha_0} - B \frac{Y_2(\alpha_0)}{\alpha_0} \end{cases}$$

et qui donne finalement

$$\begin{cases} A = \alpha_0 \frac{\theta_0 Y_2(\alpha_0) + \dot{\theta}_0 Y_1(\alpha_0)}{J_1(\alpha_0) Y_2(\alpha_0) - J_2(\alpha_0) Y_1(\alpha_0)} \\ B = -\alpha_0 \frac{\theta_0 J_2(\alpha_0) + \dot{\theta}_0 J_1(\alpha_0)}{J_1(\alpha_0) Y_2(\alpha_0) - J_2(\alpha_0) Y_1(\alpha_0)} \end{cases}$$

On peut alors tracer $\theta(t)$ à l'aide d'un logiciel.



3.2 modulation de fréquence

Nous avons maintenant une application dans laquelle les fonctions de Bessel se produisent dans la description d'une onde modulée. L'expression d'une fréquence porteuse comprend une fréquence porteuse, f_c et la signal modulant avec une fréquence f_m . Le décalage de phase de la porteuse est lié à l'intégrale par rapport au temps de l'onde de modulation $F_m(t) = \cos 2\pi f_m t$, de sorte que le signal actuel est [2]

$$f_c(t) = \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi K_2 \int_0^t \alpha \cos(2\pi f_m t) dt \right)$$

On peut intégrer pour obtenir

$$F_c(t) = \cos [2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (3.2.1)$$

où $\beta = K_2 \alpha / f_m$, constante appelée l'indice de modulation.

Nous pouvons élargir (3.2.1) pour donner

$$f_c(t) = \cos(2\pi f_c t) \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - \sin(2\pi f_c t) \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (3.2.2)$$

Une exemple de ce signal est indiquée dans figure 3.2

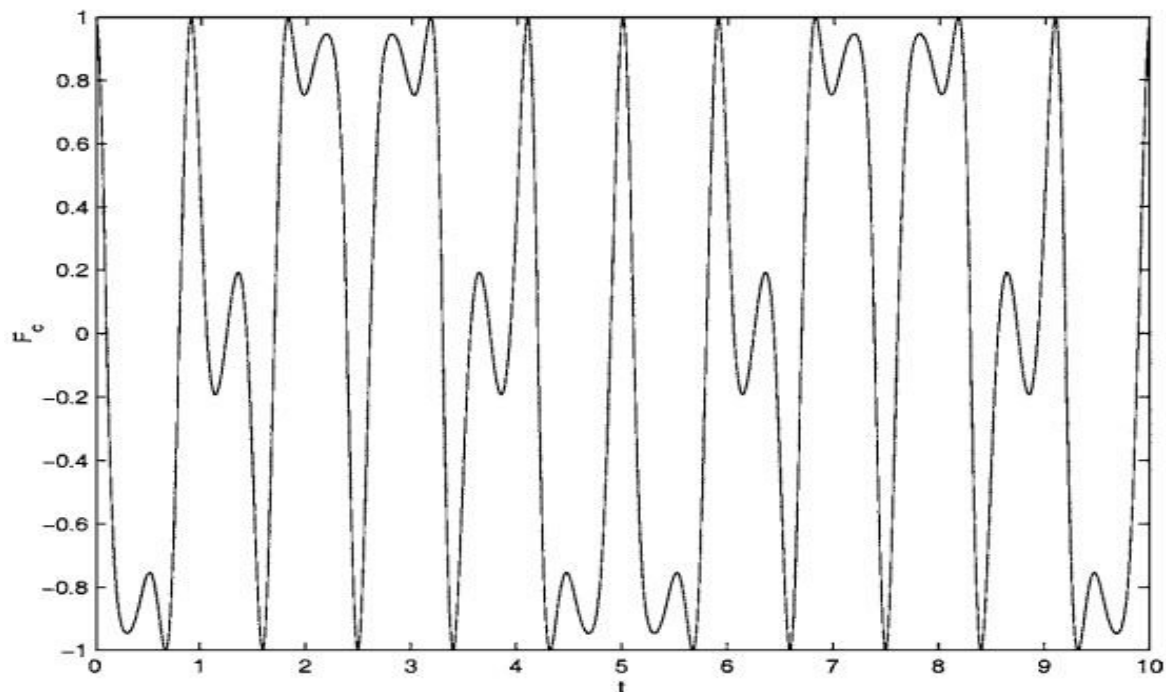


Figure 3.1 Un exemple de la modulation de fréquence, avec $\beta = 1.2$, $f_m = 1.2$ et $f_c = 1$.

Nous aimerions maintenant répandre le signal (3.2.2) en ses divers composants de fréquence. Nous pouvons le faire en exploitant (2.1.1) et (2.1.2) pour donner

$$f_c(t) = \cos(2\pi f_c t) \left[J_0(\beta) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\beta) \cos 2n(2\pi f_m t) \right] \\ + \sin(2\pi f_c t) \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(\beta) \cos(2n+1)(2\pi f_m t) \right] \quad (3.2.3)$$

en appliquant les relations trigonométriques

$$2 \cos(2\pi f_c t) \cos\{(2n) 2\pi f_m t\} = \cos\{2\pi f_c t + (2n) 2\pi f_m t\} + \cos\{2\pi f_c t - (2n) 2\pi f_m t\},$$

$$2 \sin(2\pi f_c t) \sin\{(2n+1) 2\pi f_m t\} = -\cos[2\pi f_c t + (2n+1) 2\pi f_m t] + \cos[2\pi f_c t - (2n+1) 2\pi f_m t]$$

En substituant ces expressions dans (3.2.3), on trouve $f_c(t)$ est écrit comme

$$f_c(t) = J_0(\beta) \cos(2\pi f_c t) + \\ \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta) [\cos\{2\pi t(f_c + 2n f_m)\} + \cos\{2\pi t(f_c - 2n f_m)\}] \\ - \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) [\cos\{2\pi t(f_c - (2n+1) f_m)\} - \cos\{2\pi t(f_c + (2n+1) f_m)\}]$$

Le premier terme est donné par

$$f_c(t) = J_0(\beta) \cos(2\pi f_c t) - J_1(\beta) [\cos\{2\pi(f_c - f_m)t\} - \cos\{2\pi(f_c + f_m)t\}] \\ + J_2(\beta) [\cos\{2\pi(f_c - 2f_m)t\} + \cos\{2\pi(f_c + 2f_m)t\}] \\ - J_3(\beta) [\cos\{2\pi(f_c - 3f_m)t\} - \cos\{2\pi(f_c + 3f_m)t\}] + \dots\dots\dots$$

cela signifie que la fréquence de la porteuse principale possède une signal f_c et une capacité $J_0(\beta)$, de savoir que les bandes latérales ont des fréquences $f_c \pm n f_m$ pour n est un entier, et des capacités $J_n(\beta)$, ces amplitudes sont connus sous le nom le spectre de fréquence du signal, qui est présenté dans la figure 3.4

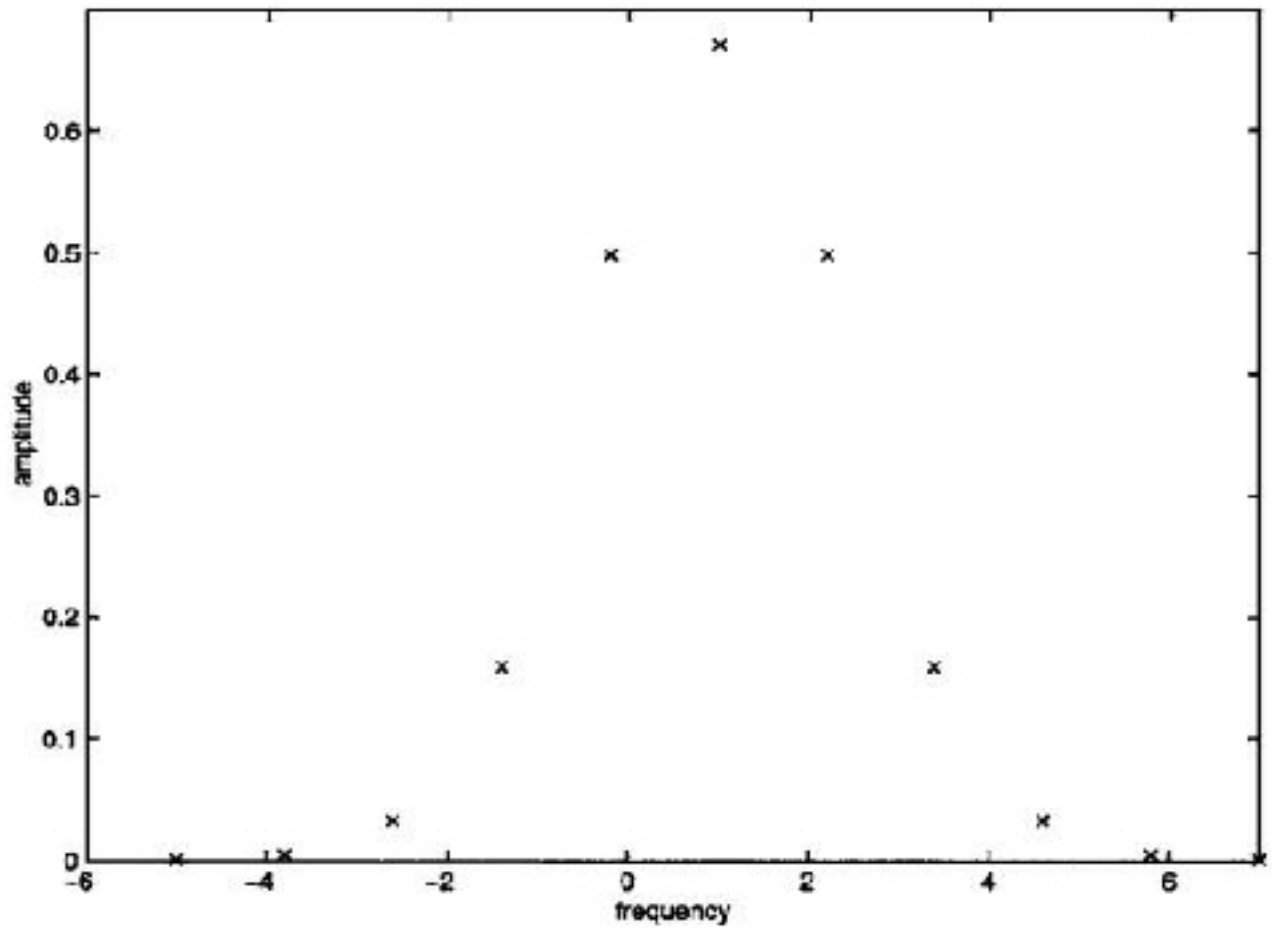


Figure.3.4. Le spectre de fréquences d'un signal avec $\beta = 0.2$, $f_m = 1.2n$ and $f_c = 1$.

Bibliographie

- [1] **Annie Cuyt.Vigdis Brevik Petersen.Britgitte Verdonk.Haakon Waadeland William B . Jones**, Handbook of Continued Fractions for Special Functions, London, 2008.
- [2] **B.G. Korenev**, Bessel Functions and their Applications, Berlin, 2002.
- [3] **Milton Abramowitz et Irene A.Stegam**, Handbook of Mathematical Functions with Formule, Geaphs, and Mathematical Tables.
- [4] **Pascal Maroni**, Fonctions hypergéométriques; Fonctions de Bessel.
- [5] **Pierre Pellat-Finet**, Optique de Fourier, Paris, 2009.
- [6] **Richard Beals et Roderick Wong** ,Special Functions A Graduate Text, Berlin, 2010.
- [7] **S. Selguk Bayin**, Essentials of Mathematical Methods in Science and Engineering, Tokyo, 2008.