

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

# MÉMOIRE

présenté à

L'ENSET D'ORAN

En vue de l'obtention

Du diplôme de Professeur d'enseignement moyen

Option : Mathématique

par

**BOUABDELLI Fatima**

et

**KHALDI Wissam**

**Titre**

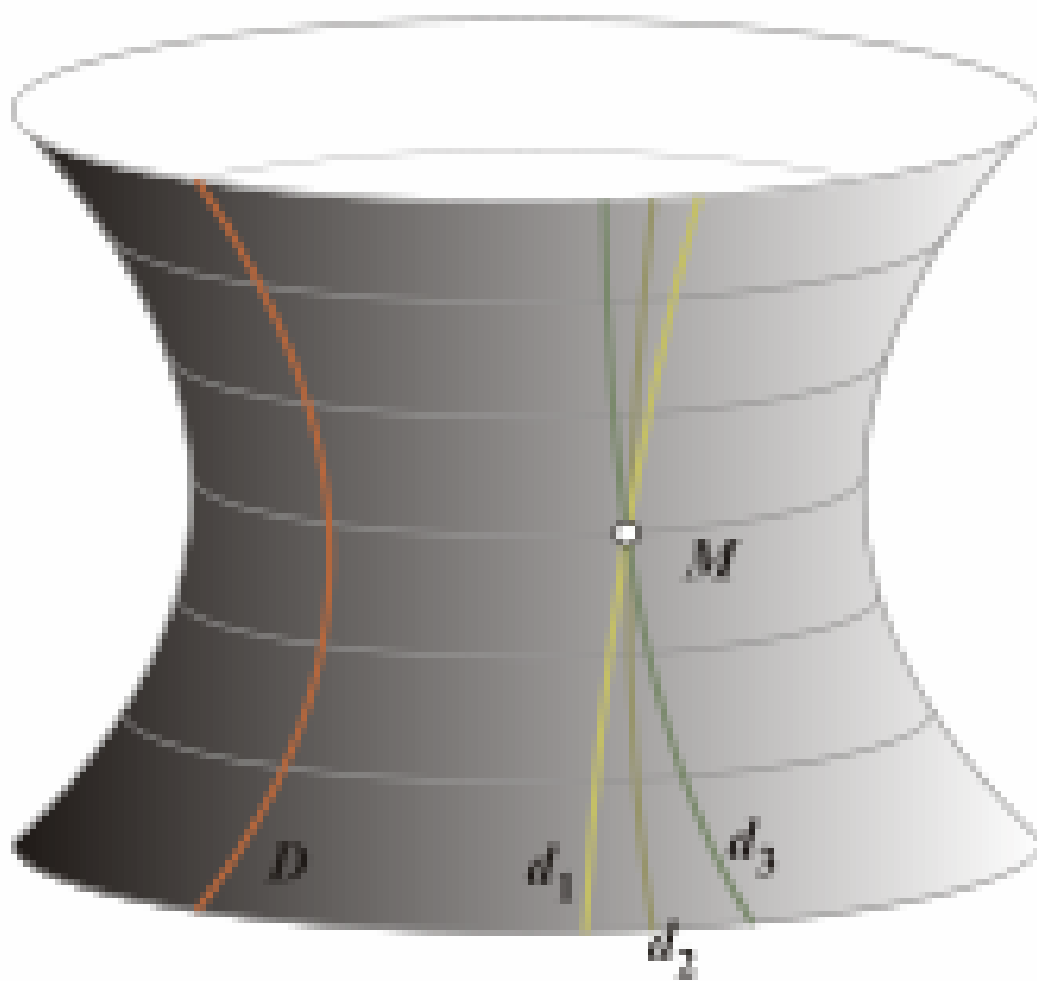
**Quelques Notions de la Géométrie Hyperbolique**

Soutenu le \*\* Juin 2010 devant le jury composé de :

- **Président : Dr REMILI Moussadek**
- **Rapporteur : Dr ZOUBIR Hanifi**
- **Examineur : Mr ELAZIRI Houari**



# GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE



# Table des matières

<b>Conclusion</b>	<b>3</b>
<b>1 Quelques notions de la géométrie différentielle</b>	<b>3</b>
1.1 Métriques riemanniennes . . . . .	3
1.2 Connexion de Levi-Civita . . . . .	7
1.3 Courbures . . . . .	9
1.4 Géodésiques . . . . .	11
<b>2 Géométrie hyperbolique</b>	<b>14</b>
2.1 Introduction . . . . .	14
2.2 Modèle de la géométrie hyperbolique : . . . . .	17
2.3 Postulats de la géométrie hyperbolique . . . . .	21
2.4 Le postulat des parallèles de Lobachevsky . . . . .	23
<b>3 Géométrie hyperbolique plane</b>	<b>26</b>
3.1 Définition . . . . .	26
3.2 La pseudo-sphère (modèle de Minkowski) . . . . .	26

3.3	Demi-plan de Poincaré . . . . .	27
3.4	Points à l'infini ; classification des isométries . . . . .	31
3.5	Le disque de Poincaré . . . . .	32
3.6	Circonférence d'un cercle ; aire d'un disque . . . . .	34
3.7	Le triangle hyperbolique . . . . .	34
3.8	L'espace hyperbolique de dimension $n$ . . . . .	37
	<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>



# Introduction

Le but de ce mémoire est d'initier le lecteur à la géométrie hyperbolique. Notre point de départ est la géométrie euclidienne du plan c'est-à-dire la géométrie ordinaire. Beaucoup d'idées mathématiques adoptent la même approche : on se demande ce qu'il arriverait si on modifiait un élément donné dans un système classique (dans le cas présent, la géométrie euclidienne). Bien entendu, pour que cette spéculation soit intéressante, il faut qu'elle réponde à une question bien précise. Nous verrons que c'est ce principe qui a guidé la création de la géométrie hyperbolique. Nous avons tous, naturellement, une idée intuitive de ce qu'est la géométrie du plan. Cependant, pour l'étudier rigoureusement, il faut dégager les règles auxquelles la géométrie doit obéir. Pour que cet exercice soit utile, il s'agit d'avoir le moins de règles possible mais d'en avoir suffisamment. Nous verrons par exemple que la géométrie euclidienne est fondée sur cinq règles de base (les postulats 1 à 5).

Ce mémoire se départage en gros en trois chapitres. Le premier chapitre est entièrement consacré aux rappels de la géométrie différentielle. On cite en particulier les notions fondamentales de ce domaine tels que la notion de courbure et les géodésiques.

Dans le second chapitre, on évoque la géométrie euclidienne, on cite en particulier les 5 postulats qui gouvernent cette géométrie. Le point crucial de ce mémoire est : le postulat des parallèles ne découle pas des autres postulats, ce qui donne naissance à d'autres géométries non euclidiennes, on cite entre autres la géométrie hyperbolique qui fait l'objet de ce chapitre.

Le troisième chapitre est plus concret, il est réservé à la géométrie hyperbolique plane. On étudie quelques modèles hyperboliques, par exemple : la pseudo-sphère (modèle de Minkowski), le demi plan de Poincaré et le disque de Poincaré. A la fin de ce chapitre, on donne la définition de l'espace hyperbolique de dimension  $n$  et sa caractérisation géométrique





# Chapitre 1

## Quelques notions de la géométrie différentielle

### 1.1 Métriques riemanniennes

Une forme différentielle quadratique sur un ouvert  $U$  de  $R^n$  une application  $C^\infty$  de  $U$  dans l'espace vectoriel des formes quadratiques sur  $R$ . Ainsi pour chaque  $x \in U$ , on a une forme quadratique  $q_x$  à coefficients  $C^\infty$ .

Plutôt que d'écrire  $q_x(X) = \sum_{i \leq j} q_{ij} X^i X^j$ , pour  $X = (X^i, \dots, X^j) \in R^n$ , on écrira

$$q_x = \sum_{i \leq j} q_{ij} dx^i dx^j$$

en utilisant la notation différentielle  $dx^i(X) = X^i$ .

Une métrique riemannienne sur  $U$  est une forme différentielle quadratique  $g$  telle que  $g_x$  soit définie positive pour tout  $x \in U$ .

Ainsi  $\sqrt{g_x}$  définit une norme qui dépend de  $x$ . La longueur d'une courbe  $C^1$  par morceaux  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  est par définition

$$L(\gamma) := \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt,$$

avec  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$ .

On définit alors une distance sur  $U$  en posant, pour  $P, Q \in U$ ,

$$d(P, Q) := \inf L(\gamma),$$

où la borne inférieure est considérée sur l'ensemble des courbes joignant  $P$  et  $Q$ .

On appelle variété riemannienne  $(M, g)$  toute variété différentiable  $M$  munie d'une métrique riemannienne  $g$ .

### 1.1.1 Espaces tangents

Soient  $U$  un ouvert de  $R^n$ ,  $p \in U$  et  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées sur  $U$ . L'espace tangent à  $U$  au point  $p$ , noté  $T_p U$ , est l'espace vectoriel  $\{p\} \times E$ , où  $E$  est l'espace vectoriel de dimension  $n$  engendré par  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ , où  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  désigne la dérivée partielle au point  $p$  de la  $i$ -ème application composante.

Posons  $TU = \bigcup_{p \in U} T_p U = U \times E$ .

Ainsi  $(p, v) \in TU \iff p \in U$  et  $v \in T_p U$ .

Soit  $\pi : (p, v) \in TU \longrightarrow p \in U$ .

Le couple  $(TU, \pi)$  est appelé fibré tangent, et l'application  $\pi$  la projection canonique de l'espace total sur la base.

On appelle champ de vecteurs sur  $U$  ou section du fibré tangent, toute application  $X : U \longrightarrow TU$  telle que, pour tout  $p \in U$ ,  $X_p = X(p) \in T_pU$ . On note par abus  $X \in TU$ .

On définit la somme de deux champs de vecteurs et le produit d'un champ de vecteurs par une fonction (sur  $U$ ) en posant :

$$(X + Y)(p) = X(p) + Y(p) \quad \text{et} \quad (\phi X)(p) = \phi(p) X(p).$$

Soient  $U$  un ouvert de  $R^n$ ,  $U'$  un ouvert de  $R^m$  et  $p \in U$ .

A toute application  $f : U \longrightarrow U'$ , on associe une application linéaire, appelée application linéaire tangente de  $f$  au point  $p$ ,  $df(p) : T_pU \longrightarrow T_{f(p)}U'$ , définie en coordonnées locales  $(x^i)$  sur  $U$  et  $(y^j)$  sur  $U'$  par :

$$df(p)(v) = \sum_{i,j} v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad \text{où} \quad v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On peut donc associer à  $f$  l'application linéaire tangente  $df : TU \longrightarrow TU'$  définie par :

$$df(p, v) := df(p)(v) \quad \text{ou encore} \quad df(X)(f(p)) := df(p)(X_p)$$

Soit  $\phi : U \longrightarrow R$  une fonction  $C^\infty$  sur  $U$  (on note  $\phi \in C^\infty(U)$ ) et  $X$  un champ de vecteurs sur  $U$ . On définit une action de  $X$  sur  $\phi$  en posant

$$X\phi(p) = d\phi(p)(X_p), \quad \forall p \in U.$$

Cette action permet d'interpréter les champs de vecteurs comme des dérivations sur les fonctions  $C^\infty$ .

### 1.1.2 Crochet de Lie des champs de vecteurs

Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur  $U$ . on appelle le crochet de Lie de  $X$  et  $Y$ , noté  $[X, Y]$ , le champ de vecteurs défini pour toute fonction  $\phi \in C^\infty(U)$  par

$$[X, Y](f) = X(Y(\phi)) - Y(X(\phi)).$$

En coordonnées locales  $(x^i)$  sur  $U$

$$[X, Y](f) = \sum_i \sum_j \left( X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

**Remarque-** Si  $g$  est une métrique riemannienne sur  $U$  :  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs sur  $U$ , on pose :  $g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p)$ .

En coordonnées locales  $(x^i)$  sur  $U$ , on a

$$g(X, Y)(p) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j,$$

$$\text{avec } X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ et } Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

La norme d'un champ de vecteurs  $X$  s'écrit

$$\|X\|(p) = \sqrt{g(X, X)(p)}.$$

Si  $f : M \rightarrow N$  est une immersion entre les ouverts  $U \subset R^n$  et  $U' \subset R^m$ , et si  $g_{U'}$  est métrique riemannienne sur  $U'$ , on définit une métrique riemannienne sur  $U$  notée  $f^*g_{U'}$ , en posant

$$f^*g_{U'}(X, Y) = g_{U'}(df(X), df(Y)).$$

Cette métrique est appelée métrique induite par  $f$  sur  $U$ .

**Exemples-** 1. Le produit scalaire provenant de la distance euclidienne définit une métrique riemannienne sur  $R^n$ .

2. Soit  $S^n$  la sphère unité de  $R^{n+1}$ . considérons l'application  $f : S^n \rightarrow R^n$  définie  $f(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left( \frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \right)$ , pour  $x^{n+1} \neq 1$ .

L'application  $f$  est une immersion de  $S^n$  sur  $R^n$  et induit sur  $S^n$  une métrique riemannienne  $g$  à partir de la métrique euclidienne sur  $R^n$ , appelée métrique canonique locale la métrique canonique sur  $S^n$ .

En coordonnées locales la métrique canonique sur  $S^n$  s'écrit :

$$g_{ij}(y) = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} \delta_{ij},$$

où  $\|y\|$  désigne la norme euclidienne de  $y$  et  $\delta_{ij}$  les symboles de Kronecker.

L'espace tangent en un point  $x \in S^n$  est constitué par les vecteurs de  $R^{n+1}$  qui sont orthogonaux (au sens usuel) à  $x$ .

## 1.2 Connexion de Levi-Civita

Soit  $U$  un ouvert de  $R^n$ . une connexion sur  $U$  est un opérateur  $\nabla$  qui à deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sur  $U$  associe un troisième champ de vecteurs, noté  $\nabla_X Y$ , tel que

$$\nabla_{(\lambda X + \beta Y)} = \lambda \nabla_X Y + \beta \nabla_Y X \text{ avec } \lambda \text{ et } \beta \text{ des fonctions sur } U.$$

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$\nabla_X (\phi Y) = \phi \nabla_X Y + (d\phi(X)) Y$ , où  $\phi$  est une fonction sur  $U$  (règle de Leibniz pour les dérivations).

**Proposition-** Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $U$ . Il existe une unique connexion  $\nabla$  sur  $U$  telle que : 1.  $\nabla$  est sans torsion :  $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \forall X, Y \in TU$ .

2.  $\nabla$  est compatible avec la métrique  $g$  :

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \forall X, Y, Z \in TU.$$

Cette unique connexion est appelée la connexion de Levi-Civita et est définie par la relation

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(Y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)$$

Une connexion permet de comparer les vecteurs en deux points différents ; mais la comparaison dépend du chemin suivi ; d'où la notion de courbure que nous définirons plus loin.

### 1.2.1 Coefficients de Christoffel

Soient  $(x^i)$  un système de coordonnées sur  $U$  et  $\nabla$  une connexion sur  $U$ . Il existe des fonctions coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  définies sur  $U$  telle que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \forall i, j.$$

Ces  $\Gamma_{ij}^k$  sont symétriques  $i$  et  $j$  et sont appelées les coefficients de Christoffel de la connexion  $\nabla$ .

Si  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  sont deux champs de vecteurs sur  $U$ , alors

$$\nabla_X Y = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k X^i X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Dans le cas où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita déterminée par une métrique riemannienne  $g$  sur  $U$ , on a

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

les coefficients de Christoffel déterminent la connexion.

### 1.3 Courbures

C'est une notion fondamentale en géométrie riemannienne.

Soient  $g$  une métrique riemannienne sur  $U$ ,  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita de  $g$  et  $X, Y, Z$  des champs de vecteurs sur  $U$ . On pose

$$R(x, Y) Z = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - [X, Y] Z$$

En un point  $x \in U$ , la valeur de ce champ de vecteurs ne dépend que des valeurs des champs  $X, Y, Z$  en  $z$ . Pour  $X, Y, Z, W \in TU$ , on pose

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y) Z, W)$$

On définit ainsi un 4-tenseur sur  $TU$  appelé tenseur de courbure de Riemann. Il est antisymétrique en  $X, Y$  et en  $Z, W$ , et symétrique en  $(X, Y)$  et  $(Z, W)$ .

Soit  $m \in U$ . si  $X, Y \in T_m U$  sont linéairement indépendants, on définit la courbure sectionnelle du plan  $P$  déterminé par  $X$  et  $Y$  par



$$\sigma(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - (g(X, Y))^2}.$$

La quantité  $\sigma(X, Y)$  dépend seulement de  $p$  et non de la base de  $p$  choisie, et pourrait être notée  $\sigma(P)$ .

On appelle courbure sectionnelle de  $(U, g)$ , la fonction qui à tout plan  $p \subset T_m U$  associe sa courbure sectionnelle  $\sigma(P)$ .

Il est clair que le tenseur de courbure détermine la courbure sectionnelle.

Réciproquement la courbure sectionnelle détermine aussi le tenseur de courbure. Dans le cas où la courbure sectionnelle est constante et égale à  $k$ , on a la relation :

$$R(X, Y, Z, W) = k [g(X, Z) g(Y, W) - g(X, W) g(Y, Z)],$$

la dépendance par rapport au point  $m \in U$  étant toujours sous-entendue.

### Exemples :

L'espace euclidien  $R^n$  a une courbure sectionnelle nulle. On dit que c'est un espace plat (ou une variété plate).

La sphère munie de la métrique canonique a une courbure sectionnelle constante et égale à 1.

## 1.4 Géodésiques

C'est une généralisation de la notion de droites.

Soit :  $\gamma : I \longrightarrow U$  une courbe régulière sur  $U$ . Pour tout  $t \in I, \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}U$ .

On dira qu'un champ de vecteurs  $X \in TU$  est parallèle le long de la courbe  $\gamma$ , relativement à une connexion  $\nabla$ , si

$$\forall t \in I, \nabla_{\dot{\gamma}(t)}X(\gamma(t)) = 0.$$

et la courbe  $\gamma$  est appelée une géodésique sur  $U$ , relativement à la connexion  $\nabla$ , si

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0, \forall t \in I.$$

On traduit cette égalité en disant que  $\gamma$  est auto-parallèle.

**Proposition-** Soient  $p \in U$  et  $v \in T_pU$ . Il existe une unique géodésique  $\gamma : R_+ \longrightarrow U$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ .

**Preuve-** Théorème de Cauchy-Lipschitz. Si  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita, alors les équations des géodésiques s'écrivent en coordonnées locales

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) = 0, \forall t \in I \text{ et } \forall k = 1, \dots, n,$$

où  $\gamma : I \longrightarrow U$  est une courbe régulière sur  $U$ . Les notations  $\dot{\gamma}$  et  $\ddot{\gamma}$  désignent les dérivées premières et secondes de  $\gamma$  par rapport à  $t$ .

Les géodésiques sont en fait les points critiques de la fonctionnelle qui à toute courbe associe sa longueur. Ainsi toutes les courbes minimisant cette fonctionnelle sont des géodésiques.

## Exemples

- Les géodésiques de l'espace euclidien  $R^n$  sont les droites.
- Les géodésiques de la sphère canonique sont les grands cercles.



# Chapitre 2

## Géométrie hyperbolique

### 2.1 Introduction

Le résultat bien connu que la somme des angles d'un triangle est un angle plat, c'est-à-dire  $180^\circ$  (un résultat qu'avait démontré Euclide lui-même), est une conséquence de ces règles. Il ne serait donc pas utile de l'inclure dans notre liste de postulats. D'un autre côté, nous verrons aussi qu'il n'est pas possible de démontrer le postulat 5 à partir des autres. Cela indique que cette règle doit faire partie de notre liste. L'approche axiomatique, l'idée de décrire les systèmes (la géométrie, l'arithmétique, la théorie des ensembles, l'analyse, etc.) par un système complet et compact de règles est une préoccupation importante des mathématiciens : c'est ce qui leur permet d'assurer la rigueur de leurs raisonnements.

C'est le mathématicien grec Euclide (*III<sup>e</sup> s. av. J. - C.*) qui a le premier établi les règles ou postulats qui gouvernent la géométrie du plan. Il énonce les postulats auxquels, selon lui, obéit la géométrie du plan :

1. Pour tout point  $P$  et tout point  $Q$  différent de  $P$ , il existe une seule droite  $k$  qui passe par les points  $P$  et  $Q$ .

2. Pour tout segment  $AB$  et tout segment  $CD$ , il existe un unique point  $E$  tel que  $B$  est entre  $A$  et  $E$  et le segment  $CD$  est de longueur égale au segment  $BE$ .

3. Pour tout point  $O$  et tout point  $A$  différent de  $O$ , il existe un cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ .

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux (un angle droit étant défini comme l'un ou l'autre des deux angles égaux résultant de l'intersection de 2 droites).

5. Le postulat des parallèles d'Euclide : pour chaque droite  $k$  et chaque point  $P$  qui n'est pas sur  $k$ , il existe une droite  $m$  qui passe par  $P$  et qui est parallèle à  $k$ .

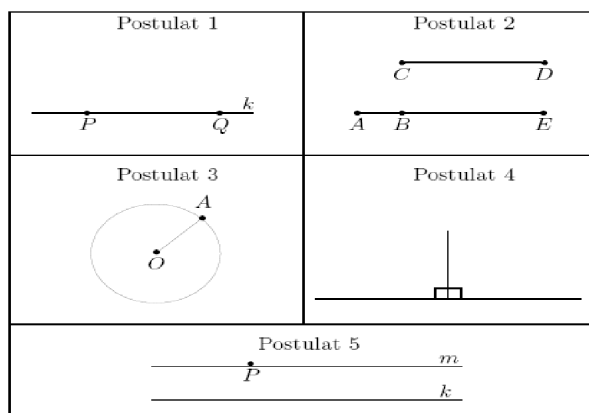


Figure 1 – Les postulats d'Euclide

Cette présentation des postulats de la géométrie euclidienne est considérée comme naive (c'est-à-dire trop imprécise) de nos jours. Elle s'appuie trop sur notre intuition de la géométrie et repose sur des concepts non définis (qu'est-ce qu'un point, une droite?)

Euclide démontre un bon nombre de résultats qui sont maintenant bien connus à partir des cinq postulats.

La liste de ses postulats, une fois modernisée, s'est avérée aussi complète que possible. Une autre question se pose cependant : cette liste pourrait-elle être plus courte ? Y a-t-il un postulat qui est, en fait, une conséquence des autres ?

Dans cette optique, le postulat 5 a longtemps intrigué les mathématiciens. En fait, on suggère qu'Euclide lui-même avait des doutes sur la nécessité de l'inclure dans la liste. Si le postulat 5, le postulat des parallèles d'Euclide, est une conséquence des autres, il suffit de faire un raisonnement mathématique pour le démontrer. Naturellement, notre inhabileté à y parvenir ne prouve rien en soit.

Ce n'est qu'au **XVIII** siècle, avec Girolamo Saccheri, que la question a été sérieusement étudiée. Il a tenté de démontrer que le postulat 5 est une conséquence des autres ; mais il n'a pas réussi. Cependant, ses travaux sont tout de même perçus comme les précurseurs de la géométrie non euclidienne.

Si, d'un autre côté, le postulat 5 n'est pas une conséquence des autres, comment le démontrerait-on ? La réponse est simple, même si elle n'est pas intuitive. Il suffit de créer une géométrie, un univers, où les postulats 1 à 4 sont satisfaits et où le postulat 5 ne l'est pas. En effet, en créant un tel univers, on montre que ce dernier n'est pas une conséquence logique des autres. Une telle géométrie, différente de la géométrie euclidienne, est dite non euclidienne. C'est ce qu'a fait Nikolai Ivanovich Lobachevsky, un mathématicien russe, dans un article publié en 1829. Dans cet article, était publiée pour la première fois une description de la géométrie hyperbolique. Il y a, en fait, une certaine controverse tant sur la paternité de cette découverte (les noms de Carl Friedrich Gauss et de Janos Bolyai y sont aussi associés) que sur la façon dont elle a été initialement reçue. En effet, cette découverte allait à l'encontre des idées établies.

La géométrie hyperbolique de Lobachevsky nous permet donc de répondre par la négative à la question : Le postulat des parallèles d'Euclide est-il une conséquence

des autres postulats? . Il s'agit maintenant d'expliquer comment on peut décrire cette nouvelle géométrie alors que notre point de vue est résolument euclidien.

Nous allons, pour représenter cet univers différent, faire appel à un modèle qui sera une transposition fidèle de la géométrie hyperbolique dans la géométrie euclidienne.

## 2.2 Modèle de la géométrie hyperbolique :

Notre modèle consiste en un demi-plan. Dans la figure 2 , plus bas, on ne considère que ce qui est strictement au-dessus de la droite  $l$  : ce sera notre univers hyperbolique. Un autre élément important de notre modèle est la distorsion suivante : plus on s'approche de la droite  $l$ , plus les objets sembleront petits à nos yeux euclidiens.

Infinitésimalement, ce changement est inversement proportionnel à la distance ou l'on est de  $l$ . On comprend bien alors que la droite  $l$  ne peut jamais être atteinte. Mathématiquement, on l'exprime ainsi : étant donné deux vecteurs,

$u = (u_1, u_2)$  et  $v = (v_1, v_2) \in R^2$ , le produit scalaire entre les deux vecteurs au point ayant pour coordonnées  $(x, y)$  est donné par l'équation :

$$\langle u, v \rangle_{(x,y)} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{y^2}. \quad (1)$$

En particulier, la longueur du vecteur  $v$  est  $\|v\|/y$  alors que  $\|v\|$  correspond à la longueur habituelle en géométrie euclidienne. Pour illustrer combien les choses ont changé, notons que les deux segments verticaux de la figure 2 sont de même longueur hyperbolique.

Revenons sur le mot infinitésimalement qui peut porter à confusion. L'équation (1) ne s'applique qu'aux vecteurs ou (segments infinitésimaux)  $u$  et  $v$  qui partent du point ayant pour coordonnées  $(x, y)$ . En effet, pour un plus long segment, la variable  $y$  change le long du segment et l'équation (1) n'est plus valable.



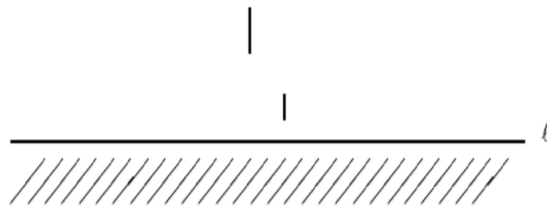


Figure 2 - L'espace hyperbolique

Utilisons un exemple pour expliquer plus concrètement le mot infinitesimale. Le diamètre de la terre a l'équateur est de  $40\,076\text{km}$ . Si on construit un petit pont (disons de moins d'une centaine de mètres), on peut agir comme si la terre était plate parce que la longueur du pont est (relativement parlant) infinitésimale par rapport au diamètre de la planète. Si on considère le Pont de la Confédération (ce pont relie l'île-du-Prince-Edouard et le Nouveau-Brunswick) dont la longueur est de  $12,9\text{km}$ , il n'en est plus de même. Ce pont doit alors respecter la courbe de la planète (voir la figure 3).

Il est important de bien définir les termes utilisés. Par exemple, le postulat 1 fait référence à une droite mais, qu'est-ce qu'une droite dans notre nouvel univers ? Si on pense à la droite qui passe par deux points donnés comme étant le chemin le plus court entre deux points, on peut imaginer que les choses vont changer si la géométrie n'est plus la même. Par exemple, sur une sphère, le chemin le plus court entre deux points n'est pas une droite mais un arc de cercle.

Il en est aussi de même en géométrie hyperbolique. Si on va du point  $A$  au point  $B$  (voir la figure 4), on n'a pas le choix : il est de plus en plus difficile d'avancer



Figure 3 - Un long pont

mais, la droite verticale est ce qu'il y a de plus rapide. D'un autre côté, on imagine facilement que pour aller du point  $C$  au point  $D$  (toujours à la figure 4), la droite euclidienne n'est pas le meilleur moyen. En effet, on fait face à un dilemme : on veut se rapprocher du point  $D$  tout en restant le plus longtemps possible loin de la droite  $l$ .

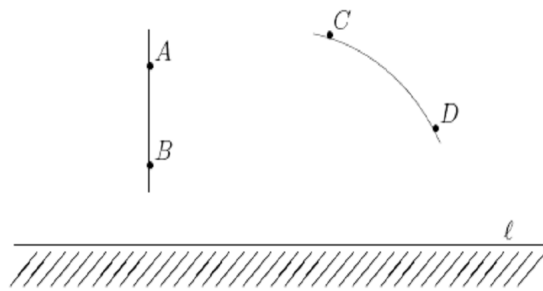


Figure 4 - Le chemin le plus court dans l'espace hyperbolique

Du point de vue mathématique, on considère les courbes  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  allant du point  $C$  (c'est-à-dire  $\gamma(a) = C$ ) au point  $D$  (c'est-à-dire  $\gamma(b) = D$ ) et, de toutes ces courbes, on choisit celle qui donne la valeur  $L(\gamma)$  la plus petite ou

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)}} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{y(t)} dt.$$

la courbe  $\gamma$  qui donne le minimum est en fait celle qui décrit un arc de cercle qui passe par les points  $C$  et  $D$  et dont le centre est sur la droite  $l$ . Pour ne pas être en reste, dans le cas où les deux points sont verticaux (les points  $A$  et  $B$  de la figure 4), la courbe qui les joint correspond à un cercle de rayon infini.

La dérivation de ces résultats se fait généralement à l'aide de la technique qu'on appelle le calcul des variations qui dépasse le cadre de ce mémoire.

La figure 5 montre comment on construit, en pratique, la droite hyperbolique qui passe par deux points non verticaux. Il est utile de se rappeler dans cette construction que la perpendiculaire au milieu d'une corde d'un cercle passe par le centre de celui-ci.

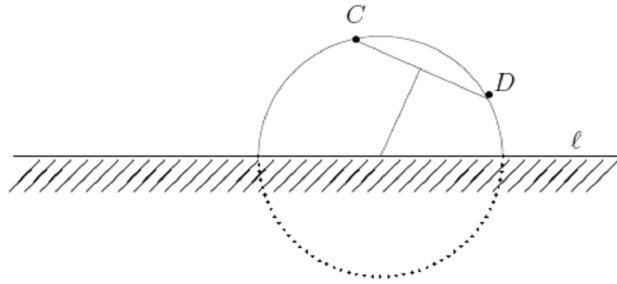


Figure 5 – La droite hyperbolique

Il est alors raisonnable de dire que les droites hyperboliques sont les droites verticales et les demi-cercles ayant leurs centres sur la droite  $l$ .

Notre but est de montrer que cette nouvelle géométrie répond bien à la question posée plus haut : Le postulat 5 est-il une conséquence des postulats 1 à 4. Nous de-

vons donc revoir les postulats donnés plus haut et montrer que les quatre premiers restent vrais alors que le cinquième ne tient plus.

## 2.3 Postulats de la géométrie hyperbolique

Les figures 4 et 5 montrent bien que le postulat 1 est satisfait dans la géométrie hyperbolique.

Pour ce qui est du postulat 2, on considère la figure 6. Dès qu'on se rapproche de la droite  $l$  en parcourant la droite hyperbolique qui passe par les points  $A$  et  $B$ , la distance parcourue tend vers l'infini, c'est-à-dire devient arbitrairement grande. En d'autres mots, on peut choisir le point  $E'$  de telle sorte que la distance entre les points  $B$  et  $E'$  est aussi grande qu'on le veut. En choisissant le point  $E'$  approprié entre  $B$  et  $E'$ , on obtient un segment de longueur hyperbolique  $\|CD\|$ .

En ce qui concerne le postulat 3, il faut d'abord noter que l'angle entre deux droites hyperboliques qui se rencontrent est l'angle entre les droites qui sont tangentes à leur point d'intersection  $A$  (voir la figure 7).

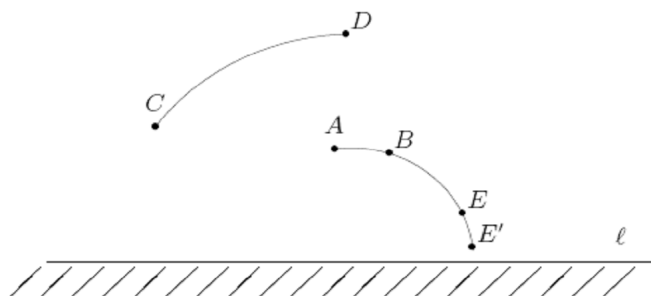


Figure 6 – Le postulat 2 dans l'espace hyperbolique

En fait, les angles hyperboliques sont les mêmes que dans notre espace. On n'a qu'

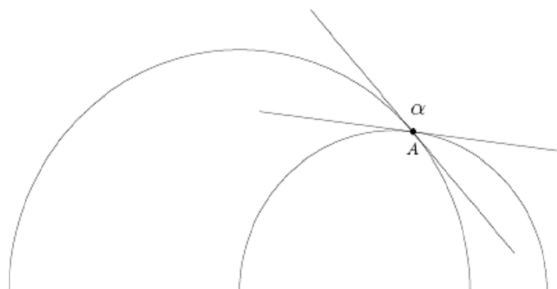


Figure 7 – L'angle entre deux droites hyperboliques

à considérer l' équation (1) et la méthode habituelle pour calculer le cosinus d'un angle entre deux vecteurs :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\langle u, v \rangle_{(x,y)}}{\sqrt{\langle u, u \rangle_{(x,y)}} \sqrt{\langle v, v \rangle_{(x,y)}}} = \frac{\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{y^2}}{\sqrt{\frac{u_1^2 + u_2^2}{y^2}} \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{y^2}}} \\ &= \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \end{aligned}$$

ce qui est la formule habituelle du cas euclidien.

Pour ce qui est du postulat 4, nous avons une notion de distance bien définie (même si l'expression de cette distance est relativement complexe). Si on se réfère au Petit Larousse, le cercle est une courbe plane dont tous les points sont situés à égale distance d'un point fixe, le centre<sup>10</sup>. Il n'y a donc aucune difficulté à définir le cercle dans le contexte hyperbolique. Ce qui est surprenant, c'est qu'un cercle hyperbolique est aussi un cercle euclidien mais avec un centre différent. Voir la figure 8 en se rappelant que plus on s'approche de la droite  $l$ , plus les distances hyperboliques sont considérables :  $O Y$  représente le centre du cercle.

## 2.4 Le postulat des parallèles de Lobachevsky

On en arrive finalement au postulat 5. Le postulat des parallèles d'Euclide n'est plus vrai. On doit le remplacer par le suivant : 5 Le postulat des parallèles de Lobachevsky :

Pour chaque droite  $k$  et chaque point  $p$  qui n'est pas sur  $k$ , il existe (au moins) deux droites  $m_1$  et  $m_2$  qui passent par  $p$  et qui sont parallèles à  $k$ .

La figure 9 sert à illustrer ce postulat. En effet, dans cette figure, les droites  $m_1$  et  $m_2$  passent par le point  $p$  et sont parallèles à la droite  $k$  (puisqu'elles ne la rencontrent pas).

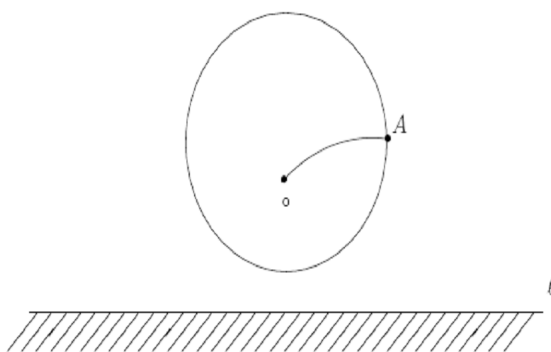


Figure 8 - Un cercle hyperbolique

En fait, on peut montrer qu'é tant donné une droite hyperbolique  $k$  et un point  $p$  qui n'est pas sur  $k$ , il existe une infinité de droites qui passent par  $p$  et qui sont parallèles à  $k$ .

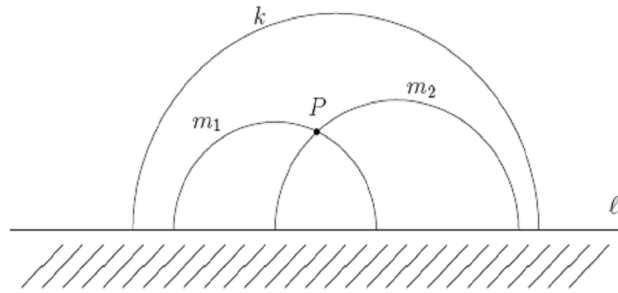


Figure 9 – Droites parallèles en géométrie hyperbolique

Si on accepte les nouvelles définitions de la distance et de la droite de la géométrie hyperbolique, on comprend maintenant que le postulat 5 des parallèles d'Euclide n'est plus valide même si les autres postulats tiennent ; il n'est donc pas une conséquence des autres.





# Chapitre 3

## Géométrie hyperbolique plane

### 3.1 Définition

On appelle géométrie hyperbolique une géométrie dans laquelle on a remplacé l'axiome d'Euclide par un autre axiome : l'existence de plusieurs droites passant par un point extérieur à une autre droite donnée et ne coupant pas celle-ci.

Nous étudierons dans ce qui suit quelques modèles de plan hyperbolique.

### 3.2 La pseudo-sphère (modèle de Minkowski)

*La pseudo-sphère est la surface*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\},$$

munie de la métrique induite par la forme quadratique

$$dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

Les géodésiques sont les traces des deux-plans passant par l'origine.

Le groupe d'isométries est le sous-groupe de  $Gl(3, R)$  formé des matrices  $M = (m_{ij})$  telle que

$$M^T Q M = M, m_{33} > 0,$$

où  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

En effet préserver la pseudo-sphère, c'est envoyer le vecteur  $(0, 0, 1)$  sur un vecteur dont la troisième composante est positive.

### 3.3 Demi-plan de Poincaré

Le *demi-plan de Poincaré* est la partie

$$H^2 := \{z = x + iy \in C, y \geq 0\} \text{ de } C,$$

munie de la métrique  $g$ , donnée par la forme quadratique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Toute courbe  $C^1$  par morceaux  $\gamma : t \in [\alpha, \beta] \longrightarrow (x(t), y(t)) \in H^2$  a pour longueur

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

La distance de deux points  $P, Q \in H^2$  est la borne inférieure des longueurs des courbes joignant  $P$  et  $Q$ .

### 3.3.1 Géodésiques de $H^2$

Les droites (les segments verticaux) sont des géodésiques de  $H^2$ .

Considérons deux points distinctes  $A = a + iy_0$  et  $B = a + iy_1$  de  $H^2$  et le chemin  $\gamma : [y_0, y_1] \rightarrow H^2$  telle que  $\gamma(t) = (a, t)$ . (On suppose par exemple  $y_0 \leq y_1$ ). Alors

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} = \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

Si  $c : [\alpha, \beta] \rightarrow H^2$  telle que  $c(t) = (x(t), y(t))$ , est une autre courbe joignant  $A$  et  $B$ , on a

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

On en déduit que

$$d(A, B) = \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

En conclusion les droites verticales  $t \in \mathbb{R} \rightarrow (x_0, y_0 \exp(t))$  sont des géodésiques de  $H^2$ . Pour trouver d'autres géodésiques de  $H^2$ , on va s'intéresser à certaines isométries de  $H^2$ .

Il est immédiat de voir que les transformations  $z \rightarrow z+h$ ;  $z \rightarrow -z$ ;  $z \rightarrow \lambda z$ ,  $\lambda \in R_+^*$ , conservent les longueurs des courbes et sont donc des isométries de  $H^2$ .

-l'inversion  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  est une isométrie de  $H^2$ . En effet si  $(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ , on a

$$dx = \frac{dx}{x^2+y^2} - \frac{2x(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad dy = \frac{dy}{x^2+y^2} - \frac{2y(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

on a donc bien

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dz^2 + dy^2}{y^2}.$$

Plus généralement toute inversion de module positive et de pôle situé sur l'axe réel est une isométrie de  $H^2$ .

En effet soit  $z \rightarrow r^2 \cdot \frac{1}{z-a} + a$  inversion de centre  $a \in R$  et de rayon  $r$ . si on l'identifie à  $(z, y) \rightarrow (u(z, y), v(x, y))$ , on a

$$u(x, y) = a + r^2 \frac{z-a}{(z-a)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v(z, y) = r^2 \frac{y}{(z-a)^2 + y^2}$$

Un calcul direct permet de montrer que

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{dz^2 + dy^2}{y^2}$$

Il en résulte que les intersections avec  $H^2$  des cercles centrés sur l'axe réel (c'est-à-dire les droites hyperboliques) sont des géodésiques de  $H^2$ , et que par deux points de  $H^2$  il passe une unique géodésique.

En effet soient deux points  $p$  et  $q$  de  $H^2$ , ils sont reliés par une unique droite hyperbolique. Supposons qu'il y ait une autre géodésique de  $p$  et  $q$ . On peut envoyer la droite  $(pq)$  sur une droite verticale (inversion dans un cercle tangent de rayon double), et on a alors une géodésique entre les points images  $p'$  et  $q'$  qui n'est pas la

droite verticale ; ce qui n'est pas possible. On peut donc énoncer :

**Théorème** -les géodésiques de  $H^2$  sont les droites hyperboliques .

Dans la suite nous appellerons réflexions du demi-plan de Poincaré les inversions de module positif et de pôle situé sur l'axe réel , ainsi que les symétries euclidiennes par rapport aux droites orthogonales à l'axe réel , restreintes à  $H^2$  ces transformations ont les propriétés suivantes :

-Ce sont des isométries de  $H^2$  dont l'ensemble des points fixes est une géodésique .

-Quels que soient  $p$  et  $q$  distincts dans  $H^2$  , il existe une unique réflexion les échangeant.

Dans ces conditions : 1. L'ensemble des points équidistants de deux points distincts  $p$  et  $q$  de  $H^2$  est une géodésique : c'est l'ensemble des points fixes de l'unique réflexion qui échange  $p$  et  $q$  .

2.Si une isométrie a trois points fixes non alignés , c'est l'identité.

3. Toute isométrie  $H^2$  est produit de une , deux ou trois réflexions.

### 3.3.2 Isométrie de $H^2$

Les isométries de  $H^2$  sont des difféomorphismes , on dira qu'une isométrie est directe si son jacobien est négatif comme dans le cas euclidien et sphérique , une isométrie qui à deux points fixes distincts est l'identité, et par conséquent, une isométrie directe est produit de deux réflexions.

**Proposition** :- Les isométries directes de  $H^2$  sont les homographies

$$T : z \longrightarrow T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in R \text{ avec } ad - bc > 0.$$

**Preuve**- la relation  $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ab}{c(cz+d)}$  montre que : a) la partie imaginaire de  $T(z)$  est égale au produit du complexe  $\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$  par la partie imaginaire de  $z$ .

Il en résulte que  $T(H^2) \subset H^2$  et comme  $T^{-1}$  est du même type que  $T$ ,  $T(H^2) = H^2$

b)  $T$  est composée d'isométries ; d'autre part  $T$  est holomorphe et  $T(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$  est partout non nul ; donc son jacobien est positif.

Réciproquement, un calcul direct montre que le produit de deux réflexions est bien de cette forme.

**Remarque**- Quitte à multiplier  $a, b, c, d$  par un même réel convenable, on peut se ramener au cas où  $ad - bc = 1$ .

En ce qui concerne les isométries inverses, on a :

**Proposition** : les isométries inverses de  $H^2$  sont les homographies de la forme

$$T : z \longmapsto T\left(z = \frac{az+b}{cz+d}\right); \quad a, b, c, d \in R$$

avec  $ad - cb = -1$ .

### 3.4 Points à l'infini ; classification des isométries

On appelle point à l'infini du demi-plan de Poincaré les points de  $R \cup \{\infty\}$ .

Une géodésique de  $H^2$ , prolongée aux points infinis, admet deux points à l'infini, et

inversement deux points distincts de  $R \cup \{\infty\}$  sont les points à l'infini d'une géodésique. On a la classification suivante des isométries :

**Proposition-** Soit  $T : z \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in R$  avec  $ad - bc = 1$ . alors ou bien  $T$  admet deux points fixes à l'infini (cas où  $|a + b| \geq 2$ ), et  $T$  est conjuguée à une homothétie  $z \mapsto \lambda z$ ,  $\lambda \in R_+$ .  $T$  est alors dite hyperbolique.

La géodésique définie par les points fixes est globalement invariante, et la restriction de  $T$  à cette géodésique (qui est un espace métrique isométrique à  $R$ ) est une translation. L'espace hyperbolique de dimension  $n$  de longueur  $|\ln \lambda|$ . Ou bien  $T$  admet un point fixe à l'infini (cas où  $|a + d| = 2$ ), et  $T$  est conjuguée à une translation  $z \mapsto z + \lambda$ ,  $\lambda \in R$ . On dit dans ce cas que  $T$  est parabolique. Ou bien  $T$  admet un point fixe dans  $H^2$  (cas où  $|a + d| < 2$ ). On dit alors que  $T$  est elliptique.

### 3.5 Le disque de Poincaré

L'homographie  $h : z \mapsto h(z) = \frac{z-1}{z+1}$  définit un homéomorphisme du demi-plan de Poincaré  $H^2$  sur le disque unité  $D^2 \{z \in C / |z| < 1\}$ .

Les points à l'infini de  $H^2$  sont envoyés sur le cercle unité. On transporte à  $D^2$  la métrique de  $H^2$  en posant

$$dist_{D^2} = dist_{H^2}(h^{-1}(p), h^{-1}(q)).$$

Si  $(h^{-1}(z, y) = (X, Y))$ , on obtient en remplaçant  $X$  et  $Y$  en fonction de  $z$  et  $y$  dans l'expression  $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$  la métrique sur  $D^2$  donnée par :

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2+dy^2}{1-x^2-y^2} = 4 \frac{dx^2+dy^2}{1-\|x\|^2},$$

avec  $X = (z, y)$ .

On appelle disque de Poincaré le disque  $D^2$  muni de la métrique ci-dessus définie.

Les géodésiques de  $D^2$  sont les images par l'homographie  $h$  de celles de  $H^2$  :

Ce sont les arcs de cercles rencontrant le cercle unité orthogonalement, ainsi que les diamètres du cercle unité.

Les points à l'infini du disque de Poincaré sont les points du cercle unité.

On a la même classification des isométries directes en elliptiques, hyperboliques et paraboliques. Les restrictions à  $D^2$  des rotations euclidiennes de centre  $o$  sont des isométries de  $D^2$ . Réciproquement, toute isométrie de  $D^2$  fixant  $o$  est une rotation. Par conséquent, toute isométrie elliptique du disque de Poincaré est conjuguée à une isométrie de la forme  $z \mapsto \exp\{ia\}z$ . Aussi bien dans le cas du demi-plan ou du disque de Poincaré, la distance a l'expression explicite suivante :

**Proposition-** Soient  $p$  et  $q$  deux points distincts de  $D^2$  ou de  $H^2$ , et soient  $\alpha$  et  $\beta$  les points à l'infini de la géodésique passant par  $p$  et  $q$ . Alors

$$d(p, q) = \ln |[a, b, \alpha, \beta]|$$

**Preuve :** On se ramène au cas de deux points de  $H^2$  situés sur une géodésique qui est une demi-droite verticale, et on utilise l'invariance du birrapport par homographie.

**Exemple :** Si  $p$  est un point du disque situé à la distance euclidienne  $r$  de l'origine



$o$ ,

$$d(o, q) = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

### 3.6 Circonférence d'un cercle ; aire d'un disque

Soit  $C$  un cercle hyperbolique de rayon  $R$ , centré par exemple en  $i$ . Dans le modèle de Poincaré, c'est un cercle euclidien de rayon  $r$  et de centre  $o$ , avec  $r = \frac{\exp\{R\}-1}{\exp\{R\}+1}$ .

On a une paramétrisation de  $C$  dans  $D^2$  :  $x = r \cos \theta$  ;  $y = r \sin \theta$ . Par suite  $ds = \frac{2r}{1-y^2} d\theta$ . La circonférence de  $C$  est alors donnée par :

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1-r^2} d\theta = 4\pi \frac{r}{1-r^2} = 2\pi \sinh(R).$$

L'aire  $A$  du disque délimité par  $C$  est donnée par

$$A = \int_0^R 2\pi \sinh(z) dz = 4\pi \sinh\left(\frac{R}{2}\right).$$

### 3.7 Le triangle hyperbolique

#### 3.7.1 Formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique :

Soit  $(A, B, C)$  un triangle hyperbolique avec un angle  $\theta$  en  $a$ . Notons  $a, b, c$  les longueurs des  $AB, BC$  et  $AC$  resp. Alors :

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \theta.$$

**Preuve-** On se place dans le modèle de l'hyperboloïde. Soient  $U$  et  $V$  les vecteurs unitaires en  $A$ , dans la direction de  $B$  et  $C$  resp. Alors

$$B = \cosh(c) A + \sinh(c) U, C = \cosh(b) A + \sinh(b) V \text{ et } \cos \theta = \langle U, V \rangle.$$

Le résultat provient du fait que :  $\cosh(a) = \langle B, C \rangle$ .

On appelle triangle idéal, un triangle dont tous les sommets sont à l'infini ( $R$  dans le demi-plan supérieur).

**Lemme 1-** Tous les triangles idéaux sont congruents et ont pour aire .

**Preuve-** Tout triangle idéal peut être transformé par isométrie en un triangle de sommets  $(-1, 0)$ ;  $(1, 0)$  et  $\infty$ . Si les trois sommets d'un triangle idéal sont sur  $R$ , on le transforme, par une inversion dans un cercle de centre l'un de ces sommets, en un triangle idéal ayant pour  $\infty$  sommet. Par une translation horizontale suivie d'une homothétie de centre  $(0, 0)$  on le transforme en un triangle ayant pour sommets  $(-1, 0)$ ;  $(1, 0)$  et  $\infty$  Tous les triangles idéaux sont donc congruents. Le domaine  $D$  délimité par ce triangle est

$$D = \left\{ (x, y) \in R / -1 \leq x \leq 1; \sqrt{1-x^2} \leq y \right\}.$$

La différentielle d'aire est donnée dans  $H^2$  par

$$da = \frac{1}{y^2} dx dy.$$

L'aire du triangle est alors

$$A = \int \int_D da \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En posant  $z = \sin \theta$ , on obtient

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

On appelle triangle à deux tiers idéal, un triangle pour lequel au moins deux sommets sont à l'infini. Le sommet ne se trouvant pas à l'infini est alors appelé sommet réel.

**Lemme 2-** Deux triangles à deux tiers idéaux sont congruents si et seulement si ils ont même angle intérieur en leur sommet réel.

**Lemme 3-** Considérons un triangle à deux tiers idéal ayant pour angle  $\pi - \theta$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ). Soit  $A$  l'application qui à un tel triangle associe son aire  $A(\theta)$ . Alors

$$A(\theta) = \theta$$

### 3.7.2 Formule de Gauss-Bonnet

Soit  $(A, B, C)$  un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont  $\alpha, \beta, \gamma$ . Alors son aire est

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

**Preuve-** On considère un (vrai) triangle  $(A, B, C)$  dans le modèle de Poincaré. On se donne trois points à l'infini  $A', B', C'$  en prolongeant les côtés sur le cercle unité. Alors

$$\begin{aligned} A(ABC) &= A(A'B'C') - A(A'AC') - A(C'CB') - A(B'BA') \\ &= \pi - A(\alpha) - A(\beta) - A(\gamma) \end{aligned}$$

$$= \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

**Corollaire-** L'aire d'un polygône à  $n$  côtés est égale à :

$$(n - 2) \pi - \sum \text{angle}.$$

### 3.8 L'espace hyperbolique de dimension $n$

L'espace hyperbolique de dimension  $n$  est le sous-espace

$$H^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in R^{n+1} / -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1, x_0 > 0\}$$

de  $R^{n+1}$  muni de la métrique  $g$  induite par la forme quadratique

$$-dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$$

La condition  $x_0 > 0$  assure que  $H^n$  est connexe.

Si  $P \in H^n$ , l'espace tangent  $T_P H^n$  peut être identifié au sous-espace vectoriel  $g$ -orthogonal à  $p$ .

#### 3.8.1 Caractérisation géométrique

L'espace hyperbolique a une courbure sectionnelle constante et égale à -1.





# Bibliographie

J. W. ANDERSON, *hyperbolic geometry*, Springer-Verlag , Berlin, Heidelberg, 2. Ed., 2005.

S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian geometry*, Springer-Verlag , Berlin, Heidelberg, 2. Ed., 1993.

S. STAHL, *The Poincare half-plane*, Jones and Bartlett, 1993. Verlag, Berlin, Heidelberg.

G. WALSHAP, *metric structures in differential geometry*, Springer-Riemannian geometry and geometric analysis.

# Bibliographie

J. W. ANDERSON, *hyperbolic geometry*, Springer-Verlag , Berlin, Heidelberg, 2. Ed., 2005.

S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian geometry*, Springer-Verlag , Berlin, Heidelberg, 2. Ed., 1993.

S. STAHL, *The Poincare half-plane*, Jones and Bartlett, 1993. Verlag, Berlin, Heidelberg.

G. WALSHAP, *metric structures in differential geometry*, Springer-Riemannian geometry and geometric analysis.