UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE
DE LICENCE EN MATHÉMATIQUES

Sujet

Simple solution du problème de Basel

Présenté par

ARAB AZIZ et NEKI SAYEH

Soutenu le 06 /07/2010 devant le Jury

M.OULD ALI.M	**Président**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**
M^{em} AZIZ HAMANI.K.	**Examinateur**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**
M.Belaidï BENHARATH	**Encadreur**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**

2009/2010

Remerciements

Nous remercions en premier lieu :**Dieu** tout puissant.

Nous tenons remercier toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de prés, à la réalisation de ce modeste travail, et en particulier, notre encadreur **B.Belaidi**, pour sa totale disposition et ses conseils efficaces qui ont permis l'accomplissement de ce travail.Nous remercions aussi l'ensemble de nos professeurs pour leur enseignement précieux.

Ainsi, nous tenons à exprimer nos vifs remerciements aux membres de jurys **M.OULD ALI.M** et M^{em} **AZIZ HAMANI .K** qui nous ont fait l'honneur d'examiner notre travail.

Je dédie ce travail à mes très chers parents, à mes frères surtout **Mohamed Amine**, à mes sœurs surtout **Zahia** et **Siham**, à mes amis et tout ma familles, en particulier :**Abdo,Hamid,Ali**.Sans oublier la petite fleur **Zohra.**

Aziz

Je dédie ce travail à mes très chers parents, à mes frères surtout **Sliman**, à mes sœurs, à mes amis et tout ma familles, en particulier :**Noreddine,Hamid,Samah.**

Sayeh

Contents

INTRODUCTION

Le célèbre problème de Basel de la théorie des nombres a été posé par Pietro Mengoli en 1644 et a été résolu par Leonbard Euler en 1735. Le problème de Basel consiste à déterminer la somme précise de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Dans ce mémoire on donne quelques méthodes de résolution de ce problème.

Le mémoire est composé de deux chapitres et d'une bibliographie.

Dans le premier chapitre on donne quelques définitions, lemmes et théorèmes nécessaires pour ce travail.

Dans le deuxième chapitre on donne quelques méthodes pour déterminer la somme précise de la série de Riemann. En conclusion on donne une solution simple du problème de Basel.

(Chapter head:)Notions préliminaires

1 Rappels sur les séries numériques

Definition 1 *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels (ou complexes). Associons à cette suite, la suite*$\{S_n\}$ *définie par*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

S_n *est appelée la somme partielle d'ordre* n *de la suite* (u_n) *. L'expression*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots$$

est appelée série à terme général u_n *et on note* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$*. Si la suite* $(S_n)_{n\in N}$ *à une limite, on dit que la série* $(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)$ *à pour somme* S *tel que*

$$\mathbf{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

et on note

$$S = \lim_{n+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n).$$

1.1 Nature d'une série

1. Si S est finie on dit que la série $(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)$ est convergente .

2. Si S est infinie où n'existe pas, on dit que la série $(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n)$ est divergente.

1.2 Condition necéssaire de convergence

Theorem 2 *Si la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge, alors le terme général* u_n *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$ *c'est à dire* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Proof. Par hypothèse, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est converge, alors la suite des sommes partielles $\{S_n\}$converge et tend vers S, donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$$

et on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

Remark 3 *On verra plus loin que la condition* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *est nécessaire mais n'est pas suffisante pour la convergence d'une série, de plus, si* $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$*, alors la série est divergente.*

2 Série à termes positifs

Definition 4 *La série* u_n*est dite à termes positifs s'il existe un rang* $N \in \mathbb{N}$ *telle que*

$$u_n \geq 0, \forall n > N.$$

Remark 5 *La suite des sommes partielles* $\{S_n\}$ *associe à une série à termes positifs, de plus, elle est croissante car*

$$S_n - S_{n-1} = (u_0 + u_1 + ...u_n) - (u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}) = u_n \geq 0.$$

2.1 Condition de convergence

La condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série à terme positifs est donnée par :

Theorem 6 *Pour qu'une série à terme positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée, c'est à dire :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_k \leq M.$$

Example 7 *Soit la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *On a pour* $n > 1$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

d'où

$$S_m = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{m^2}$$
$$< 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}) = 2 - \frac{1}{m} < 2$$

donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *est convergente puisque ses sommes partielles sont majorées par* 2 *et l'on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$$

Theorem 8 (***Règle de majoration***) *Soit* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *deux séries à terme positifs vérifiant :* $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Alors*

1. *si* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *est convergente, alors* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *est convergente.*
2. *si* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *est divergente, alors* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *est divergente.*

2.2 Exemple de série à termes positifs

2.2.1 Étude de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in R)$

Nous allons étudier la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pour α réel donné. Nous savons déjà que pour $\alpha = 1$ cette série est divergente et que pour $\alpha = 2$ elle est convergente par application du théorème (1.2.2). On en déduit qu'elle est divergente pour $\alpha \leq 1$ (car on a alors $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$) et convergente pour $\alpha \geq 2$ (car $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$). Nous pouvons donc nous borner à l'étudier dans le cas $1 < \alpha < 2$. Le procédé utilisé ici consistera à la comparer à la séris de terme général

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}, \ (n \geq 1).$$

Pour $\alpha > 1$, on a bien $v_n > 0$, et par application de la formule des accroissements finies à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ on voit qu'il existe un nombre x_n vérifiant

$$n < x_n < n+1 \text{ et } v_n = \frac{\alpha - 1}{x_n^\alpha}.$$

La suite (x_n) ainsi définie satisfait à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.Si on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ on a donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \alpha - 1$.

Pour $\alpha > 1$, la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est équivalante donc à celle de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$.D'autre part, on a

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = (1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}) + (\frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{3^{\alpha-1}}) + ... + (\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}})$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Ce qui montre que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge pour $\alpha > 1$ (puisque alors la suite $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ tend vers 0).

En conclusion, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $\alpha \leq 1$.

3 Séries de Fonctions

3.1 Suites de fonctions

Definition 9 *Une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}, (\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ s'appelle suite de fonctions sur $\mathbb{F}$. On la note $\{f_n\}$, où $f_n = f(n)$.*

3.2 Séries de fonctions

Definition 10 *Soit une suite $\{u_n\}$ de fonctions à valeurs complexes définies sur un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}$. Associons à cette suite, la suite de fonctions $\{S_n\}$ définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On appelle série de fonctions (sur E) de terme général u_n le couple $(\{u_n\}, \{S_n\})$ constitué des deux suites $\{u_n\}$ et $\{S_n\}$.La fonction S_n est appelée n-ième somme partielle de la série.

Definition 11 *On dira que* $\sum_n u_n$ *est convergente en* $x_0 \in E$ *si la série numérique* $\sum_n u_n(x_0)$ *est convergente. On dira que* $\sum_n u_n$ *est convergente sur* E *si la série* $\sum_n u_n(x)$ *est convergente en tout point* $x \in E$ *. Dans ce cas,on dit que* $\sum_n u_n$ *est simplement convergente sur* E.

3.3 Théroème de la convergence monotone

Definition 12 *On appelle espace mesuré tout triple* (E, T, m) *où* (E, T) *est un espace mesurable et* m *une mesure sur* T.

Definition 13 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, on dit que* m *est* δ *finie si* $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *telle que*

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad et\ \forall n \in \mathbb{N},\ m(A_n) < +\infty.$$

Theorem 14 *Soient* (E,T, M) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions croissante, mesurable et positive convergente vers une fonction* $f \in \mathbb{R}_+$. *Alors* f *est une fonction mesurable et positive et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E} f_n dm = \int_{E} f dm.$$

3.3.1 Conséquence du théorème de la convergence monotone

Soient (E,T, M) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable et positive. Alors

$$\int_{E} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) dm = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E} f_n dm.$$

3.4 Théorème de Fubini

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous la forme suivante.

Corollary 15 *Soient* (E_1, T_1, m_1) ,(E_2, T_2, m_2) *deux espaces mesurés* δ *finie et* (E, T, m) *l'espace produit;* $f : E \to \mathbb{R}$, *une fonction mesurable telle que*

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} |f(x_1, x_2) dm_2(x_2)| \right) dm_1(x_1) < +\infty$$

$$\int_{E_2} \left(\int_{E_1} |f(x_1, x_2) dm_1(x_1)| \right) dm_2(x_2) < +\infty.$$

Alors

$$\int\limits_{E_1}\left(\int\limits_{E_2}|f\left(x_1,x_2\right)dm_2(x_2)|\right)dm_1(x_1)=\int\limits_{E_2}\left(\int\limits_{E_1}|f\left(x_1,x_2\right)dm_1(x_1)|\right)dm_2(x_2).$$

4 Séries de Fourier

Definition 16 *On appelle série trigonométrique (réelle) une série de fonctions*

$$\sum u_n, u(x)=a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x$$

$\{a_n\},\{b_n\},\{\omega_n\}$ *étant des suites de nombres réels.*

On considérera dans cette partie les séries trigonométriques de la forme

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

où $l>0$ est un nombre réel fixé.

Definition 17 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique de période $2l$, localement intégrable. La série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

où

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi x}{l}dt,\ n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi x}{l}dt,\ n=0,1,2,...$$

s'appelle série de Fourier de f. On dit que les nombres a_n,b_n sont les coefficients de Fourier de f.

Theorem 18 (Dini) *Soit $f\in\mathbb{R}_{2l}$. Si f vérifie au point x_0 les propriétés suivantes:*

1. $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x),\ f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ *existent,*
2. $\exists\delta>0$ *tel que*

$$\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-0)+f(x_0+t)}{t}dt<+\infty,$$

alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers la valeur

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right].$$

Theorem 19 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique localement intégrable. Supposons qu'au point x_0*

1. $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *existent,*

2. *les limites (finies)*

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f'(x_0+0)}{x-x_0},\quad f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f'(x_0-0)}{x-x_0}$$

existent. Alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers la valeur

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right].$$

Theorem 20 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique de période $2l$ et partout dérivable. Alors f est partout représentable par sa série de Fourier, c'est_à_dire*

$$\forall x:\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Remark 21 *Le résultat de ce théorème est encore vrai si l'hypothèse de dérivabilité de f partout est remplacée par l'existence des dérivées à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

4.1 Série de Fourier des fonctions paires ou impaires.

Conservons les notation de la Définition 2, si la fonction f est paire, c'est_à_dire

$$f(x)=f(-x),\forall x\in\mathbb{R})$$

, alors on a

$$\forall n\in\mathbb{N};\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi x}{l}dt;\ b_n=0.$$

Si la fonction f est impaire, $f(x)=-f(-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors on a

$$\forall n\in\mathbb{N};\ a_n=0,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

4.1.1 Forme complexe de la série de Fourier

Definition 22 *Nous appelons coefficients de Fourier de type complexe de la fonction f les nombres c_n ; $(n \in \mathbb{Z})$ définis par*

$$c_n = \frac{1}{2l} \int\limits_0^l f(x)\, e^{\frac{inx}{l}} dx$$

où

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \ \text{ si } n > 0, \ \ c_0 = \frac{a_0}{2} \ \text{ et } c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \ \text{ si } n < 0.$$

Cela étant, la série de Fourier de f est la série $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ et nous pouvons écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

4.1.2 Théorème de Perseval

Si f est une fonction numérique ou complexe intégrable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, alors ses coefficients de Fourier ordinaires (a_n, b_n) et ses coefficients de Fourier de type complexe(c_n) vérifient les relations

$$\int\limits_0^{2\pi} |\ f(x)\ |^2\, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\ c_n\ |^2 = \pi \left[\frac{|\ a_0\ |^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|\ a_n\ |^2 + |\ b_n\ |^2 \right) \right].$$

Proof. On a vu que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \text{ avec } c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad \varphi_n(x) = e^{inx}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Avec la notation

$$c_n = (f \backslash\ \varphi_n)$$

on peut vérifier que

$$(f \backslash\ \varphi_n) = \int\limits_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ipx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-p)x}}{i(n-p)} \right]_0^{\pi} = 0 \text{ pour } n \neq p$$

$$(\varphi_n \backslash \varphi_n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{inx} e^{-0nx} dx = 1.$$

D'où

$$(f\backslash f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\right)$$

avec

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{-n} e^{-inx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid c_n \mid^2$$

donc

$$\int\limits_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid a_n \mid^2 .$$

Si $n \neq 0$

$$\mid c_n \mid^2 = \mid c_{-n} \mid^2 = \frac{\left(\mid a_n \mid^2 + \mid b_n \mid^2\right)}{4}$$

d'où

$$\int\limits_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^2 dx = 2\pi \sum_{n=-c\infty}^{+\infty} \mid c_n \mid^2 = 2\pi \left[\mid c_0 \mid^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mid c_n \mid^2 + \mid c_{-n} \mid^2\right)\right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{\mid a_0 \mid^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mid a_n \mid^2 + \mid b_n \mid^2\right)\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{\mid a_0 \mid^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mid a_n \mid^2 + \mid b_n \mid^2\right)\right].$$

■

5 Théorème des résidus

5.1 Chemin et contour

Soit γ la courbe de points

$$Z : [t_a, t_b] \to \mathbb{C}, \; Z(t) = x(t) + iy(t)$$

telle que

1. Si $x(t)$, $y(t)$ sont continues sur $[t_a, t_b]$ et $Z^{'}(t)$ existe et continue par morceaux sur $[t_a, t_b]$.
2. Si γ est injectif sauf peut être sur les éxtrimités (t_a, t_b).

$$\forall t_1, t_2 \in]t_a, t_b[; t_1 \neq t_2 \Rightarrow Z(t_1) \neq Z(t_2)]$$

alors, γ est appelée chemin.Si $a = b$ telle que $a = Z(t_a), b = Z(t_b)$, alors γ est un contour (chemin fermé). Voir Fig1

5.2 Fonctions analytiques

5.2.1 Séries entières

Definition 23 *On appelle série entière de centre z_0 et de coefficients a_n la série de terme général*

$$g_n(z) = a_n (z - z_0)^n .$$

5.2.2 Fonctions analytiques

Soit D un ouvert du plan complexe, une application $f : D \to \mathbb{C}$ est dite analytique dans D si pour tout point z_0 de D, l'application $z \to f(z_0 + z)$ est développable en série entière sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$

En d'autre part, f est analytique dans D si chaque point z_0 de D admet un voisinage sur lequel $f(z)$ est développable en série entière de la variable $u = z - z_0$, on a avec précision, f est analytique dans D si chaque point z_0 de D on peut associer un nombre $r > 0$ et une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes tels que, pour $|z - z_0| < r$, on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

5.2.3 Les points singuliers

Soit z_0 un point au voisinage duquel f n'est pas analytique. On dit que z_0 est un point singulier de f

Remark 24 *Si on prend f admettant un point singulier z_0 et que l'on considère sa série de Laurent autour de z_0, on a, en notant $b_n = c_{-n}$ et $a_n = c_n$*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

5.3 Théorème des résidus

Theorem 25 *Soit D un domaine simplement connexe et soit $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ un nombre finie de point de D isolés et distincts. Soit de plus f analytique dans $D \backslash \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Si on prend γ un contour continu dans D et entourant les z_i, $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ et orionté positivement, alors*

$$\oint_\gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{+\infty} res(f, z_k) .$$

6 Intégrales de Wallis

Soit a calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

on a

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx.$$

On fait une intégration par partie, en posant $u = \sin^{n-1} x \Rightarrow u^{'} = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx$ et $v^{'} = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$. D'où

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^{n-2} x \cos^2 x\right) dx$$

$$= (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right)\right) dx = (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \left(\sin^{n-2} x - \sin^n x\right) dx$$

$$= (n-1) \left[\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx\right] = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$$

donc

$$I_n = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

On a deux cas. Si n est pair $(n = 2k)$

$$\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} = \frac{2k-1}{2k} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

$$\Rightarrow \frac{I_{2n}}{I_0} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...(2n)}$$

D'où

$$I_{2n} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...(2n)} I_0$$

avec

$$I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si n est impair $(n = 2k+1)$

$$\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} = \frac{2k}{2k+1} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2.4...(2n)}{3.5...(2n+1)} I_1$$

avec

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi/2} = 1$$

Remark 26 *Le changement de variable* $x \longmapsto \frac{\pi}{2} - x$ *donne directement le résultat de l'intégrale*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

6.0.1 Formule de Wallis

On a

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ : \ 0 < \sin x < 1$$

donc

$$\sin^{2k+2} x < \sin^{2k+1} x < \sin^{2k} x.$$

On en déduit que la suite $\{I_n\}$ est positive et décroissante

$$I_{2k+2} < I_{2k+1} < I_{2k}.$$

D'où l'inégalité

$$\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} < \frac{I_{2k+1}}{I_{2k+2}} < \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} < 1$$

on déduit

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1.$$

En portant les valeurs de I_{2k+1} et I_{2k}, on obtient alors la relation dite formule de Wallis qui exprim $\frac{\pi}{2}$ sous forme de produit infini

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(2.4...2k)^2}{[1.3.5...(2k-1)]^2 (2k+1)}.$$

Lemma 27 *On a*

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ : \ \frac{2}{\pi} x < \sin x < x$$

Proof. On va étudier la fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
on pose

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

et donc

$$f^{'}(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \langle 0, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f^{'}(x)$		$-$	
$f(x)$	1		$\frac{2}{\pi}$

donc,$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\frac{2}{\pi} \langle \frac{\sin x}{x} \langle 1$$

d'où

$$\frac{2}{\pi} x \langle \sin x \langle x$$

■

Lemma 28

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ : \sin x < x < \tan x$$

Proof. On utilise la figure(2)

On a

$$aire\ du\ triangle\ OAB < aire\,(secteur) < aire\ du\ triangle\ OAC$$

$$aire\ de\ OAB = \frac{1}{2}\,(1.\sin x) = \frac{\sin x}{2}$$

$$aire \text{ de } (secteur) = \frac{x}{2}$$

$$aire \text{ de } OAC = \frac{1}{2}\tan x$$

donc

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ : \sin x \langle x \langle \tan x$$

■

Theorem 29

$$\forall x \in [-1,1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Proof.

$$\arcsin x \in [-1,1] \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \in [0,1]$$

on a

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x$$

les nombres arccos *et* $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ *sont compris entre* 0 *et* π *et ont le même; ils sont égaux.* ■

(Chapter head:)Méthodes de Calcul de la Série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

7 Méthode 1(Par série de Fourier)

Considérons la fonction paire définie par $f\,(x) = \frac{x^2}{4}$ de période 2π sur $\mathbb{R}$. Calculons les coefficients de Fourier a_n avec $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^2}{4}\cos nx dx.$$

En intégrant par partie, on obtient

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2}{n}\left(\frac{-x}{n}\cos nx|_0^\pi - \frac{1}{n}\int \cos nx dx\right)\right] = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

donc

$$f(x) = \frac{x^2}{4} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On prend $x = \pi$, on trouve

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8 Méthode 2 (Par l'analyse complexe)

On considère la fonction

$$f(z) = \pi\frac{\cot \pi z}{z^2}.$$

D'après le théorème des résidus on a

$$\oint_{C_N} f(z)dz = 2\pi i[\operatorname{Re} s(f, z_0) + \sum_{k=-N}^{N}\operatorname{Re} s(f, k)].$$

Calculons le $\operatorname{Re} s(f, z_0)$, telle que $z_0 = 0$. On a

$$\frac{\pi\cot \pi z}{z^2} = \frac{\pi\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} = \frac{(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \frac{\pi^4 z^4}{4} + \cdots)}{z^3(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} + \cdots)}$$

$$= \frac{1}{z^3}(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \cdots)(1 + \frac{\pi^2 z^2}{3} + \cdots)$$

$$= \frac{1}{z^3}(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3} + \cdots).$$

Donc

$$\operatorname{res}(f, 0) = \frac{-\pi^2}{3}.$$

De plus

$$\operatorname{res}(f,k)=\frac{1}{n^2}.$$

Et on a

$$I_N=\frac{1}{2i\pi}\oint\limits_{C_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}=\sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{n^2}+=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}$$

$$=2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3}.$$

Il suffit de montrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint\limits_{C_N}f(z)dz=0.$$

On pose $\pi z=x+iy$, on a

$$|\cot\pi z|^2=\frac{\cos^2 x+\sinh^2 y}{\sin^2 x+\sinh^2 y}$$

En majorant z verticalement sur C_N, on trouve

$$|\cot\pi z|^2=\frac{\sinh^2 y}{1+\sinh^2 y}<1.$$

De plus, si en majorant z horizontalement sur C_N, on obtient

$$|\cot\pi z|^2\leq\frac{1+\sinh^2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}{\sinh^2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}=\coth^2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)\leq\coth^2\frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$|\cot\pi z|\leq k=\coth^2\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi

$$|f(z)|\leq\frac{\pi k}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}$$

donc

$$|I_N|\leq\frac{8\pi k\left(N+\frac{1}{2}\right)}{2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Finalement

$$\lim_{N\to+\infty}I_N=0$$

D'où

$$-\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

9 Méthode 3

D'aprés la formule qui est démontré au Chapitre 1, on a pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x < x < \tan x$. Alors, on peut écrire la formule suivante

$$\cot^2 x < x^{-2} < 1 + \cot^2 x.$$

Soit n et N deux entiers naturels tels que $1 \leq n \leq N$. Pour $x = \frac{n\pi}{(2N+1)}$, on a

$$\cot^2 \frac{n\pi}{(2N+1)} < \frac{(2N+1)^2}{n^2\pi^2} < 1 + \cot^2 \frac{n\pi}{(2N+1)}.$$

En faisant la sommation pour $n = 1$ jusqu'a N, on obtient

$$\frac{\pi^2}{(2N+1)^2} \sum_{n=1}^{N} \cot^2 \frac{n\pi}{(2N+1)} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{N\pi^2}{(2N+1)^2} + \sum_{n=1}^{N} \cot^2 \frac{n\pi}{(2N+1)}.$$

En posant

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} \cot^2 \frac{n\pi}{(2N+1)}.$$

Il suffit de calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} A_N/N^2$. Si $\theta = \frac{n\pi}{(2N+1)}$, alors $\sin(2N+1)\theta = 0$, mais $\sin\theta \neq 0$. On a $\sin(2N+1)\theta$ est la partie imaginaire de $(\cos\theta + i\sin\theta)^{2N+1}$. En utilisant la formule de binôme de Newton pour montrer l'égalité suivante

$$\frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin^{2N+1}\theta} = \frac{1}{\sin^{2N+1}\theta} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{2N+1}{2N-2k} \cos^{2(N-k)}\theta \sin^{2k+1}\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{2N+1}{2N-2k} \cot^{2(N-k)}\theta = f(\cot^2\theta).$$

Ainsi, pour $x = \cot^2 x$, on a

$$f(x) = (2N+1)\, x^N - \binom{2N+1}{3} x^{N-1} \cdots$$

et les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont $\cot^2 \frac{n\pi}{(2N+1)}$ telle que $1 \leq n \leq N$. Alors

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} \cot^2 \frac{n\pi}{(2N+1)} = \frac{N(2N-1)}{3}$$

donc $A_N/N^2 \to \frac{2}{3}$ quand $N \to +\infty$. Finalement on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

10 Méthode 4

On sait que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

En prenant $x = e^{i\theta}$, on obtient

$$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \cdots + e^{in\theta} + \cdots = \frac{1}{1-e^{i\theta}}.$$

Séparons parties réelle et imaginaire

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta + \cdots = \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin n\theta + \cdots = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}. \tag{2}$$

En remplaçant dans (1) θ par $\theta + \pi$, on obtient

$$\frac{1}{2} - \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta + \cdots = 0.$$

Intégrons par rapport à θ entre les bornes 0 et x, on trouve

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} + \cdots = \frac{x}{2}.$$

Intégrons de nouveau par rapport à x entre les bornes 0 et θ, on trouve

$$1 - \cos\theta - \frac{1-\cos 2\theta}{2^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1-\cos n\theta}{n^2} + \cdots = \frac{\theta^2}{4}$$

En prenant $\theta = \pi$, il vient

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

11 Méthode 5

On considère les deux intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n}(x) dx.$$

On a

$$I_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4...2n}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2}\frac{\pi}{2}.$$

En intégrant I_n par partie, on obtient

$$I_n = \left[x \cos^{2n} x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos^{2n-1} x dx$$

$$= n \left[x^2 \sin x \cos^{2n-1} x dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left(\cos^{2n} x - (2n-1) \sin^2 x \cos^{2n-2} x\right) dx$$

$$= n\,(2n-1)\,J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

donc

$$\frac{(2n)!}{4^n n!^2}\frac{\pi}{2} = n\,(2n-1)\,J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

alors

$$\frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^{n-1}(n-1)!^2}{(2n-2)!} J_{n-1} - \frac{4^n n!^2}{(2n)!} J_n.$$

En faisant la somme pour $n = 1$ jusqu'à N, on obtient

$$\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = J_0 - \frac{4^N N!^2}{(2N)!} J_N$$

avec

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{\pi^3}{24}$$

donc il suffit de montrer que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{4^N N!^2}{(2N)!} J_N = 0.$$

En utilisant la formule

$$x < \frac{\pi}{2} \sin x$$

pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on obtient

$$J_n < \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2N} x dx = \frac{\pi^2}{4}\left(I_N - I_{N+1}\right) = \frac{\pi^2 I_n}{8\,(N+1)}$$

alors

$$0 < \frac{4^N N!^2}{(2N)!} J_N < \frac{\pi^3}{16\,(N+1)}$$

en passant à la limite quant $N \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{4^N N!^2}{(2N)!} J_N = 0.$$

Ainsi

$$J_0 = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

12 Méthode 6

On a

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dxdy.$$

D'après le théorème de la convergence monotone, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (xy)^{n-1} \right) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}.$$

En utilisant le changement de variables suivant

$$(u, v) = ((x+y)/2, (y-x)/2)$$

on trouve

$$(x, y) = (u - v, u + v)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \iint_S \frac{dudv}{1 - u^2 + v^2}$$

avec S est le carré de sommet $(0,0)$, $(1/2, -1/2)$, $(1/2, 1/2)$ et $(1,0)$. En utilisant la symétrie du carré, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 4 \int_0^{1/2} \int_0^{u} \frac{dvdu}{1 - u^2 + v^2} + 4 \int_{1/2}^{1} \int_0^{1-u} \frac{dvdu}{1 - u^2 + v^2}$$

$$= 4 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du + 4 \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \tan^{-1}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du.$$

De plus on a

$$\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) = \sin^{-1} u$$

et si $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, alors

$$\tan^2\theta = \frac{1-u}{1+u} \text{ et } \sec^2\theta = 2\,(1+u)\,.$$

Il est clair que $u = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$ et $\theta = \frac{1}{2}\cos^{-1}u = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin^{-1}u$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 4\int_0^{1/2}\frac{\sin^{-1}u}{\sqrt{1-u^2}}du + 4\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin^{-1}u}{2}\right)$$

$$= \left[2\left(\sin^{-1}u\right)^2\right]_0^{1/2} + \left[\pi\sin^{-1}u - \left(\sin^{-1}u\right)^2\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{6}.$$

C'est l'article du mathématicien APOSTOL en 1983.

13 Méthode 7

Appliquons la formule de Parseval.
Soit f la fonction de période 2π sur $\mathbb{R}$.vérifiant $f(x) = x$, pour $\mid x \mid < \pi$, on a

$$\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx = \pi\left[\frac{\mid a_0 \mid^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mid a_n \mid^2 + \mid b_n \mid^2\right)\right]. \tag{3}$$

Comme f est impaire, alors

$$a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}$$

donc en remplaçant dans la formule (3), on trouve

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}.$$

D'où

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx = \pi\left[4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right] = \frac{2\pi^3}{3}$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Conclusion

14 Simple solution du problème de Basel

Cette méthode présentée par James D.Harpar qui est simple. En utilisant le théorème de Fubini et série de Maclaurin de $\tanh^{-1}$

$$\tanh^{-1} y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \sum \frac{y^{2n+1}}{2n+1},\ |y| < 1.$$

Commençons par la relation

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+2xy+y^2} dydx = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+2xy+y^2} dxdy.$$

Le côté gauche donne

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+2xy+y^2} dydx = \int_{-1}^{1} \frac{\arctan\left(\frac{x+y}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1-x^2}} |_{y=-1dx}^{y=1}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Le côté droite donne

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+2xy+y^2} dxdy = \int_{-1}^{1} \frac{\log\left(1+2xy+y^2\right)}{2y} |_{x=-1}^{x=1} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}{y} dy = 2\int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n+1} dy = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

par suite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

References

[1] K.Allab,élément d'analyse,fonction d'une variable réelle office des publication universitaires.

[2] J.lelong_Ferrand et J.M.Arnaudiès,cours de mathématique Tome 2 Analyse 4ieme édition,Bordas,paris,1977.

[3] M.Balabane,M.Duflo,M.Frisch,D.Guegan,sommes séries,vuibert université,juin 1982.

[4] R.Chapman,université de Exeter,EX4 4QE,UK,rjc@maths.ex.ac.uk,30 avril 1999.