

Université de Montréal

Sur l'inégalité de Visser

par

Foued Zitouni

Département de mathématiques et statistique

Faculté des études supérieures

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en mathématiques

Décembre 2009

©, Foued Zitouni, 2009

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Sur l'inégalité de Visser

présenté par

Foued Zitouni

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Richard Duncan
(président-rapporteur)

Richard Fournier
(directeur de recherche)

André Giroux
(membre du jury)

Sommaire

Soit p un polynôme d'une variable complexe z . On peut trouver plusieurs inégalités reliant le module maximum de p et une combinaison de ses coefficients. Dans ce mémoire, nous étudierons principalement les preuves connues de l'inégalité de Visser. Nous montrerons aussi quelques généralisations de cette inégalité. Finalement, nous obtiendrons quelques applications de l'inégalité de Visser à l'inégalité de Chebyshev.

Mots-clefs : Inégalités - polynômes - fonctions analytiques - polynômes de Chebyshev - série de puissance - module maximum - inégalité de Visser.

Summary

Let p be a polynomial in the variable z . There exist several inequalities between the coefficients of p and its maximum modulus. In this work, we shall mainly study known proofs of the Visser inequality together with some extensions. We shall finally apply the inequality of Visser to obtain extensions of the Chebyshev inequality.

Key words : Inequalities - polynomials - analytic functions - Chebyshev polynomials - power series - maximum modulus - inequality of Visser.

DÉDICACE

À MES CHERS PARENTS ABDALLAH ET SALHA,

MON PETIT FRÈRE FADHEL

ET MES SOEURS AFEF, HAYET, MOUNA ET RABIA

POUR LEUR GRAND SOUTIEN MORAL

À TOUS MES AMIS EN TUNISIE ET AU CANADA

QUI N'ONT JAMAIS CESSÉ DE M'ENCOURAGER

ET EN SOUHAITANT LA RÉUSSITE DANS LEUR VIE

AUSSI BIEN PROFESSIONNELLE QUE FAMILIALE

À TOUS LES GENS QUE J'AIME ET QUI M'AIMENT.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, monsieur Richard Fournier, pour son soutien scientifique et moral, pour sa grande patience et sa disponibilité illimitée.

Je tiens aussi à remercier toute personne qui m'a soutenu, même si elle était loin de chez moi.

Finalement, un grand merci au gouvernement tunisien pour m'avoir offert cette occasion de terminer mes études à l'université de Montréal et aussi pour son soutien financier indispensable.

Table des matières

Sommaire	i
Summary	ii
Dédicace	iii
Remerciements	iv
Introduction	1
1 Deux preuves de l'inégalité de Visser	3
2 Une extension de l'inégalité de Visser	12
3 Quelques inégalités pour les coefficients de séries de puissances	25
4 L'extension de Dryanov et Fournier	35
5 Une application : L'inégalité de Chebyshev	45
6 Conclusion	53
Bibliographie	57

Introduction

Le problème de borner le module de certaines combinaisons des coefficients d'une fonction analytique (disons sur le disque unité \mathbb{D} du plan complexe) en fonction de certaines propriétés de cette fonction analytique est assurément aussi ancien que l'idée même de fonction analytique ; ainsi on a pour chaque $k \geq 0$,

$$|a_k| \leq \sup_{|z|<1} |f(z)|,$$

si $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ est analytique sur \mathbb{D} ; cet estimé est une conséquence facile de la formule de Cauchy et l'égalité $|a_k| = \sup_{|z|<1} |f(z)|$ ne sera valide que si $f(z) = Kz^k$ où K est une constante complexe arbitraire. Déjà , le problème de borner une somme de deux coefficients arbitraires admet une solution intuitivement moins évidente : on a pour $0 \leq k_1 < k_2 < \infty$

$$|a_{k_1}| + |a_{k_2}| \leq \frac{4}{\pi} \sup_{|z|<1} |f(z)|, \quad (1)$$

un résultat qu'on attribue parfois à Szàsz, parfois à Hayman.

Si on se restreint à des polynômes de degré fixé plutôt qu'à toute la classe des fonctions analytiques sur \mathbb{D} , l'estimé (1) demeure valide mais n'est plus optimal. En fait, le problème de déterminer pour $0 \leq k_1 < k_2 \leq n$ donnés

$$\max_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{|a_{k_1}| + |a_{k_2}|}{\max_{|z| \leq 1} |p(z)|},$$

où \mathcal{P}_n désigne la classe des polynômes à coefficients complexes de degré au plus n , n'est pas encore à ce jour complètement résolu.

Nous nous proposons dans ce mémoire de présenter quelques tentatives d'élucider en tout ou en partie ce problème, en discutant avant tout de l'inégalité de Visser qui correspond au cas $k_1 = 0$ et $k_2 = n$. Nous examinerons aussi différentes généralisations de cette inégalité tout en proposant une preuve nouvelle et inédite et en étudiant une application récente à l'inégalité de Chebyshev.

Chapitre 1

Deux preuves de l'inégalité de Visser

Comme indiqué dans l'introduction, dans un article fait avec Van-Der-Corput et publié en 1946, Visser [12] a présenté un résultat maintenant nommé **Inégalité de Visser** et il a précisé aussi les conditions pour avoir une égalité.

C'est pour cela qu'on va présenter dans cette section et dans un premier temps, la preuve de Visser et ensuite une deuxième démonstration plus au moins de notre propre cru.

1.1 Théorème : (*Inégalité de Visser*) Si $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ est un polynôme en z , à coefficients complexes arbitraires, alors

$$\max_{|z| \leq 1} |p(z)| \geq |a_0| + |a_n|.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $p(z) = a_0 + a_nz^n$.

Démonstration 1 du théorème :

Soit p un polynôme en z et à coefficients complexes et de degré au plus n , alors p est de la forme $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, $a_j \in \mathbb{C}$. Soient $w_\mu = e^{\frac{2i\mu\pi}{n}}$, ($\mu = 0, \dots, n-1$) les racines n -ième de l'unité ; on a la propriété

suivante :

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} w_{\mu}^k = \begin{cases} n & \text{si } k \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, si on considère le polynôme $q(z) = \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} p(w_{\mu}z)$, on a

$$q(z) = a_0 + a_n z^n$$

et donc $|q|_{\mathbb{D}} = |a_0| + |a_n|$ et par conséquent,

$$\begin{aligned} |q(z)| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} p(w_{\mu}z) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} |p(w_{\mu}z)| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} \max_{|z| \leq 1} |p(z)| \\ &\leq \frac{1}{n} n |p|_{\mathbb{D}} \\ &= |p|_{\mathbb{D}} \end{aligned}$$

et donc

$$\max_{|z| \leq 1} |q(z)| = |q|_{\mathbb{D}} \leq |p|_{\mathbb{D}}.$$

Il suit que

$$|a_0| + |a_n| \leq |p|_{\mathbb{D}}.$$

Cas d'égalité : On suppose ici que $|p|_{\mathbb{D}} = |a_0| + |a_n| = |q|_{\mathbb{D}}$. Soit z_0 un point sur la frontière du disque unité qui vérifie $|q(z_0)| = |q|_{\mathbb{D}}$. Donc

$$\begin{aligned} |q|_{\mathbb{D}} &= |q(z_0)| \\ &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} p(w_{\mu}z_0) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} |p(w_{\mu}z_0)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} \max_{|z| \leq 1} |p(z)| \\
&= |p|_{\mathbb{D}} = |q|_{\mathbb{D}}.
\end{aligned}$$

On a donc égalité partout et ceci est possible seulement s'il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $p(w_{\mu}z_0) = |p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi}$, ($\mu = 0, \dots, n-1$). En effet, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} |p(w_{\mu}z_0)| = |p|_{\mathbb{D}}.$$

Or on a $|w_{\mu}z_0| \leq 1$, alors $|p(w_{\mu}z_0)| \leq |p|_{\mathbb{D}}$ pour tout μ . Donc,

$$|p(w_{\mu}z_0)| = |p|_{\mathbb{D}},$$

avec ($\mu = 0, \dots, n-1$), et il suit que

$$\frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} |p(w_{\mu}z_0)| = |p|_{\mathbb{D}} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} ||p|_{\mathbb{D}}e^{i\theta_{\mu}}|$$

avec θ_{μ} égal à l'argument de $w_{\mu}z_0$ pour tout ($\mu = 0, \dots, n-1$). Une égalité pareille n'est vraie que si tout les $w_{\mu}z_0$ ont le même argument, d'où le résultat.

Soit $Q(z)$ le polynôme de degré au plus n qui s'écrit de la forme $Q(z) = p(z) - |p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} \in \mathcal{P}_n$. Pour tout ($\mu = 0, \dots, n-1$), on a toujours $Q(w_{\mu}z_0) = p(w_{\mu}z_0) - |p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} = |p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} - |p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} = 0$, donc, les $w_{\mu}z_0$ sont les zéros de Q et Q peut s'écrire de la forme

$$\begin{aligned}
Q(Z) &= p(Z) - |p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} \\
&= K \prod_{\mu=0}^{n-1} (Z - w_{\mu}z_0) \\
&= K z_0^n \prod_{\mu=0}^{n-1} (Z \bar{z}_0 - w_{\mu}) \\
&= K z_0 ((Z \bar{z}_0)^n - 1) \\
&= K Z^n - K z_0^n
\end{aligned}$$

avec $K \in \mathbb{C}$. Ainsi, $p(Z) = (|p|_{\mathbb{D}} e^{i\phi} - Kz_0^n) + KZ^n$, i.e., p est de la forme $p(Z) = A + BZ^n$ et $|p|_{\mathbb{D}} = |A| + |B|$. D'autre part, si $p(Z) = A + BZ^n$, alors $|p|_{\mathbb{D}} = |A| + |B|$, d'où le résultat.

Démonstration 2 du théorème :

Avant de présenter la démonstration que nous croyons originale, on va énoncer deux lemmes qui seront utiles pour cette démonstration.

1.1.1 Lemme : *Soit f une fonction analytique non constante dans $\overline{\mathbb{D}}$ telle que $|f(e^{i\theta})| = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Alors f peut s'écrire de la forme*

$$f(z) = c \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z},$$

telle que $|c| = 1$ et $|a_k| \leq 1$, ($k = 1, \dots, n$).

Preuve du lemme

f est une fonction analytique non nulle sur $\overline{\mathbb{D}}$, alors f admet un nombre fini de zéros dans \mathbb{D} . En effet, si f admet un nombre infini de zéros dans \mathbb{D} , alors elle admet un point d'accumulation des zéros dans $\overline{\mathbb{D}}$, donc les zéros de f ne sont pas isolés, ce qui implique que f est nulle, mais ceci est absurde. Alors, soient a_k , ($k = 1, \dots, N$), les zéros de f dans \mathbb{D} et considérons

$$F(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^N \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}},$$

cette fonction est bien définie sur \mathbb{D} . Il est clair que $F \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ et que $F(z) \neq 0$ si $|z| \leq 1$, puisque $|a_k z| = |\overline{a_k}z| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. De plus, si $|z| = 1$, alors

$$|F(z)| = \frac{|f(z)|}{\prod_{k=1}^N \frac{|z - a_k|}{|1 - \overline{a_k}z|}} = \frac{1}{z^n \prod_{k=1}^N \frac{|1 - a_k \overline{z}|}{|1 - \overline{a_k}z|}} = 1.$$

D'autre part, $\frac{1}{F(z)} \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ et $\frac{1}{|F(z)|} = 1$ si $|z| = 1$, alors $\frac{1}{|F(z)|} \leq 1$ si $|z| \leq 1$, par le principe du maximum. De tout ce qui précède, $1 \leq |F(z)| \leq 1$ pour ($|z| \leq 1$) et il suit que $|F(z)| = 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors, encore d'après le

principe du maximum, F est constante de module 1, d'où

$$f(z) = c \prod_{k=1}^N \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}$$

avec $|c| = 1$ et $|a_k| \leq 1$ pour $(k = 1, \dots, N)$.

1.1.2 Lemme : *Soit p un polynôme de degré n tel que $|p(e^{i\theta})| = 1$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $p(z) = \alpha z^n$.*

Preuve du lemme

Soit p un polynôme tel que $|p(z)| = 1$ si $|z| = 1$; d'après le lemme (1.1.1), il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que p s'écrit de la forme $p(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}$ tel que les a_k sont les zéros de p dans \mathbb{D} . Comme p est un polynôme, il suit que $a_k = 0$ pour tout $(k = 1, \dots, n)$, d'où $p(z) = e^{i\theta} z^n$.

Retournons à notre théorème; soit $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \in \mathcal{P}_n$ un polynôme non constant. Soit $M = |p|_{\mathbb{D}} = \max_{|z| \leq 1} |p(z)|$. D'après le principe du module maximum, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $p(z) - Me^{i\theta}$ ne s'annule jamais dans le disque unité ouvert, sinon p devient constant. Donc,

$$p(0) - Me^{i\theta} = a_0 - Me^{i\theta} \neq 0$$

et

$$p(z) - Me^{i\theta} = a_0 - Me^{i\theta} + a_1z + \dots + a_nz^n,$$

d'où

$$\frac{p(z) - Me^{i\theta}}{a_0 - Me^{i\theta}} = 1 + \frac{a_1}{a_0 - Me^{i\theta}}z + \dots + \frac{a_n}{a_0 - Me^{i\theta}}z^n.$$

Ce polynôme, on peut l'écrire sous la forme $\frac{p(z) - Me^{i\theta}}{a_0 - Me^{i\theta}} = \prod_{\beta=1}^n (1 - \zeta_{\beta}z)$ et tel que ses zéros sont les $\frac{1}{\zeta_{\beta}}$, $(\beta = 1, \dots, n)$.

Puisque $p(z) - Me^{i\theta} \neq 0$, pour tout $|z| < 1$, alors les zéros de $\frac{p(z) - Me^{i\theta}}{a_0 - Me^{i\theta}}$ se trouvent à l'extérieur du disque unité ouvert, c'est à dire que $\frac{1}{|\zeta_{\beta}|} \geq 1$, alors

$|\zeta_\beta| \leq 1$, pour tout $(\beta = 1, \dots, n)$. Remarquons que

$$\frac{a_n}{a_0 - Me^{i\theta}} = \prod_{\beta=1}^n (-\zeta_\beta),$$

et

$$\frac{|a_n|}{|a_0 - Me^{i\theta}|} = \prod_{\beta=1}^n |\zeta_\beta| \leq 1.$$

Donc $|a_n| \leq |a_0 - Me^{i\theta}|$, $(\theta \in \mathbb{R})$, d'où

$$|a_n| \leq \min_{\theta \in \mathbb{R}} |a_0 - Me^{i\theta}|.$$

Pour $\theta_0 = \arg(a_0)$, on a

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq ||a_0|e^{i\theta_0} - Me^{i\theta_0}| \\ &= ||a_0| - M| \\ &= M - |a_0|, \end{aligned}$$

ceci est vrai puisque $M = \max_{|z| \leq 1} |p(z)| > |p(0)| = |a_0|$. Donc

$$|a_0| + |a_n| \leq M.$$

Cas d'égalité : Puisque on a $|a_0| + |a_n| = M$, alors il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$|a_n| = |a_0 - Me^{i\theta_1}| = M - |a_0|,$$

donc, on a $\frac{|a_n|}{|a_0 - Me^{i\theta_1}|} = \prod_{\beta=1}^n |\zeta_\beta| = 1$; ceci est possible seulement si $|\zeta_\beta| = 1$, $(\beta = 1, \dots, n)$. Posons $K = a_0 - Me^{i\theta_1}$, soit Q un polynôme de degré au plus n et vérifiant $p(z) = Me^{i\theta_1} + KQ(z)$. Les zéros de Q sont sur le cercle unité. En effet, puisque $Q(z) = \frac{p(z) - Me^{i\theta_1}}{K}$, les zéros de Q sont les zéros de $p(z) - Me^{i\theta_1}$, mais on sait déjà que les zéros de $p(z) - Me^{i\theta_1}$ sont les $\frac{1}{\zeta_\beta}$ qui sont égaux à $\overline{\zeta_\beta}$ car $|\zeta_\beta| = 1$, pour $(\beta = 1, \dots, n)$.

On a $Q(0) = \frac{p(0) - Me^{i\theta_1}}{K} = \frac{a_0 - Me^{i\theta_1}}{a_0 - Me^{i\theta_1}} = 1$ et on peut donc écrire

$$Q(z) = \prod_{\beta=1}^n (1 + \zeta_\beta z).$$

Alors

$$\frac{p(z)}{Me^{i\theta_1}} = 1 + \frac{K}{Me^{i\theta_1}} Q(z).$$

Posons $\tilde{p}(z) = \frac{p(z)}{Me^{i\theta_1}}$ et $\tilde{K} = \frac{K}{Me^{i\theta_1}}$; sans perte de généralité, supposons que $M = 1$, alors $\tilde{p}(z) = \frac{p(z)}{e^{i\theta_1}} = 1 + \tilde{K}Q(z)$. Notons maintenant par b_0, b_1, \dots, b_n les coefficients de \tilde{p} , nous pouvons donc écrire $b_0 = 1 + \tilde{K}$ et $b_n = \tilde{K} \prod_{\beta=1}^n \zeta_\beta$, il suit que

$$|b_0| + |b_n| = |1 + \tilde{K}| + |\tilde{K}| = \frac{a_0}{e^{i\theta_1}} + \frac{a_n}{e^{i\theta_1}} = |a_0| + |a_n| = M = 1,$$

ceci est possible seulement si $-1 \leq \tilde{K} \leq 0$. alors, \tilde{p} est de la forme $\tilde{p}(z) = 1 - tQ(z)$, $0 \leq t \leq 1$. Soit $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, donc $1 - |1 - tQ(e^{i\theta})|^2 \geq 0$, pour tout $(\theta \in \mathbb{R})$ et ceci est vrai puisque $|\tilde{p}(z)| = |1 + \tilde{K}Q(z)| = |p(z)|$, or on a

$$\begin{aligned} 1 - |1 - tQ(e^{i\theta})|^2 &= (1 - tQ(e^{i\theta}))(1 - t\overline{Q}(e^{i\theta})) \\ &= \left(1 - t \sum_{k=0}^n \alpha_k e^{ik\theta}\right) \left(1 - t \sum_{k=0}^n \overline{\alpha_k} e^{-ik\theta}\right); \end{aligned}$$

il s'ensuit que $1 - |1 - tQ(e^{i\theta})|^2$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus n et de la forme $\sum_{k=-n}^n t_k e^{ik\theta}$. D'après le théorème de Riesz [8, pp. 410], il existe un polynôme algébrique G de degré au plus n qui ne s'annule jamais dans le disque unité ouvert et qui vérifie $1 - |1 - tQ(e^{i\theta})|^2 = |G(e^{i\theta})|^2$. Pour chaque $\beta \in (1, \dots, n)$, posons $\zeta_\beta = e^{-i\theta_\beta}$; puisque les $\overline{\zeta_j}$ sont les zéros de Q , alors $|G(\overline{\zeta_j})|^2 = 1 - |1 - tQ(\overline{\zeta_j})|^2 = 1 - 1 = 0$, d'où les zéros de G sont les zéros de Q , en plus Q et G sont de même degré, alors G est multiple de Q , alors pour un certain $T > 0$, on a

$$1 - |1 - tQ(e^{i\theta})|^2 = |G(e^{i\theta})|^2 = T|Q(e^{i\theta})|^2.$$

Soit $\Re(Q(z))$ la partie réelle de $Q(z)$, donc,

$$1 - 1 + 2t\Re(Q(e^{i\theta})) - t^2|Q(e^{i\theta})|^2 = T|Q(e^{i\theta})|^2,$$

ceci implique

$$(T + t^2)|Q(e^{i\theta})|^2 - 2t\Re(Q(e^{i\theta})) = 0,$$

donc,

$$|Q(e^{i\theta})|^2 - \frac{2t}{T + t^2}\Re(Q(e^{i\theta})) = 0,$$

alors,

$$\left|Q(e^{i\theta}) - \frac{t}{T + t^2}\right|^2 = \left(\frac{t}{T + t^2}\right)^2,$$

d'où

$$\left|Q(e^{i\theta})\frac{T + t^2}{t} - 1\right|^2 = 1,$$

posons $\nu = \frac{T+t^2}{t}$, il suit que $|\nu Q(e^{i\theta}) - 1|^2 = 1$ pour tout $(\theta \in \mathbb{R})$. D'après le lemme (1.2.2), il existe C de module 1 et tel que $\nu Q(z) - 1 = Cz^n$, pour tout z complexe, alors

$$Q(z) = \frac{C}{\nu}z^n + \frac{1}{\nu},$$

donc,

$$\begin{aligned} p(z) &= e^{i\theta_1} + KQ(z) \\ &= e^{i\theta_1} + (a_0 - e^{i\theta_1})Q(z) \\ &= e^{i\theta_1} + \frac{a_0 - e^{i\theta_1}}{\nu} + \frac{a_0 - e^{i\theta_1}}{\nu}Cz^n, \end{aligned}$$

i.e., $p(z)$ est de la forme $p(z) = A + Bz^n$ et $|p|_{\mathbb{D}} = |A| + |B|$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$. D'autre part, si $p(Z) = A + BZ^n$, alors $|p|_{\mathbb{D}} = |A| + |B|$, d'où le résultat.

Comme Visser nous a donné un résultat reliant le coefficient constant et le coefficient dominant, on essaiera dans la suite de trouver une relation entre le coefficient constant et un coefficient quelconque a_k , c'est à dire qu'on va

travailler sur des inégalités de la forme

$$|a_0| + |\alpha||a_k| \leq |p|_{\mathbb{D}}$$

et

$$|a_0| + |a_k| \leq |\beta||p|_{\mathbb{D}}$$

avec α et $\beta \in \mathbb{C}$.

Chapitre 2

Une extension de l'inégalité de Visser

Dans le chapitre précédent, on a donné deux démonstrations bien détaillées de l'inégalité de Visser. Maintenant, dans cette section, on montrera une inégalité similaire due à Dryanov et Fournier [4] et telle que l'inégalité de Visser sera un cas particulier de ce résultat.

2.1 Théorème : *Soit p un polynôme en z à coefficients complexes arbitraires,*

$$p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_kz^k + \cdots + a_nz^n.$$

Alors,

$$|a_0| + \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lceil \frac{n}{k} \rceil + 2}\right) |a_k| \leq |p|_{\mathbb{D}}.$$

Ce résultat est relié au fait de vouloir trouver une constante c telle que $\frac{|a_0|+|a_1|}{|p|_{\mathbb{D}}} \leq c$ pour tout $p \in \mathcal{P}_n$, mais ceci n'est pas résolu jusqu'à maintenant. Alors, on a modifié le problème et on cherche une meilleure constante α_n qui dépend de n et qui vérifie

$$|a_0| + \alpha_n |a_1| \leq |p|_{\mathbb{D}}.$$

On essaie ensuite de généraliser ce résultat pour tout coefficient a_k . Tout au long de ce mémoire, $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ désignera la partie entière de $\frac{n}{k}$.

Démonstration du théorème :

Dans cette section, on se restreint au cas $\frac{n}{2} < k \leq n$, c'est à dire que l'inégalité est de la forme $|a_0| + |a_k| \leq |p|_{\mathbb{D}}$. On présentera ici la preuve donnée par Van-Der-Corput et Visser [11], puis le cas d'égalité démontré par Dryanov et Fournier [4]. Avant de procéder à la démonstration, on va énoncer un résultat connexe [11] pour les fonctions analytiques.

2.1.1 Lemme : Soient la fonction $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ikt}$ et (a_u, a_v) deux coefficients arbitraires de F , tels que $u < v$, et vérifiant $a_l = 0$ si $l \equiv u \pmod{v-u}$. Alors

$$|a_u| + |a_v| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |F(t)|.$$

Preuve du lemme

Pour deux entiers positifs s et m , on a

$$\sum_{p=0}^{s-1} e^{\frac{-2i\pi pm}{s}} F\left(t + \frac{2\pi p}{s}\right) = s \sum_{k \equiv m \pmod{s}} a_k e^{ikt}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{s-1} e^{\frac{-2i\pi pm}{s}} F\left(t + \frac{2\pi p}{s}\right) &= \sum_{p=0}^{s-1} e^{\frac{-2i\pi pm}{s}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\left(t + \frac{2\pi p}{s}\right)} \\ &= \sum_{p=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\frac{-2i\pi pm}{s}} e^{ik\left(t + \frac{2\pi p}{s}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ikt} \sum_{p=0}^{s-1} e^{\frac{2i\pi p(k-m)}{s}}. \end{aligned}$$

Si $k - m \not\equiv 0 \pmod{s}$, alors

$$\sum_{p=0}^{s-1} e^{\frac{2i\pi p(k-m)}{s}} = \frac{1 - e^{2i\pi(k-m)}}{1 - e^{\frac{2i\pi(k-m)}{s}}} = 0,$$

et si $k - m \equiv 0 \pmod{s}$, c'est à dire, $k \equiv m \pmod{s}$, $e^{\frac{2i\pi p(k-m)}{s}} = 1$, d'où

$$\sum_{p=0}^{s-1} e^{\frac{2i\pi p(k-m)}{s}} = s.$$

Il suit que

$$\sum_{p=0}^{s-1} e^{\frac{-2i\pi pm}{s}} F\left(t + \frac{2\pi p}{s}\right) = s \sum_{k \equiv m \pmod{s}} a_k e^{ikt}.$$

En utilisant ce résultat, on a

$$s \left| \sum_{k \equiv m \pmod{s}} a_k e^{ikt} \right| \leq \sum_{p=0}^{s-1} \left| F\left(t + \frac{2\pi p}{s}\right) \right|,$$

et alors

$$s \max_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k \equiv m \pmod{s}} a_k e^{ikt} \right| \leq s \max_{t \in \mathbb{R}} |F(t)|.$$

Par conséquent

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k \equiv m \pmod{s}} a_k e^{ikt} \right| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |F(t)|.$$

Maintenant, au lieu de travailler avec m et s , on va remplacer m par u et s par $v - u$, donc on aura

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |a_u e^{iut} + a_v e^{ivt}| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |F(t)|.$$

Il est évident de voir que $|a_u e^{iut} + a_v e^{ivt}| \leq |a_u| + |a_v|$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $a_u = |a_u| e^{i\alpha}$ et $a_v = |a_v| e^{i\beta}$, on a

$$|a_u e^{iut} + a_v e^{ivt}| = \left| |a_u| e^{i(\alpha+ut)} + |a_v| e^{i(\beta+vt)} \right|,$$

pour $t_0 = \frac{\alpha - \beta}{v - u}$; on a aussi $\alpha + ut_0 = \beta + vt_0$ et

$$|a_u e^{iut_0} + a_v e^{ivt_0}| = |a_u| + |a_v|.$$

Donc

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |a_u e^{iut} + a_v e^{ivt}| = |a_u| + |a_v|,$$

et on a le résultat

$$|a_u| + |a_v| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |F(t)|.$$

Appliquons ce lemme à notre polynôme p , donc pour $z = e^{it}$, si u et v vérifient les conditions nécessaires, alors

$$|a_u| + |a_v| \leq \max_{|z|=1} |p(z)| = |p|_{\mathbb{D}}.$$

Si on prend $u = 0$, $v = k$ et puisque $k > \frac{n}{2}$, alors $a_k = 0$ si $l \equiv 0 \pmod{k}$ pour $l \neq k$, d'où

$$|a_0| + |a_k| \leq |p|_{\mathbb{D}}.$$

On aurait pu aussi utiliser une autre formule donnée par Rahman et Schmeisser [8, pp. 638]; soit f un polynôme en z tel que $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$.

Soient ν et k deux entiers positifs qui vérifient $0 \leq \nu \leq n$, $0 \leq k \leq n$ et $m = |k - \nu|$. Les $e^{\frac{i2\pi j}{m}}$, ($j = 0, \dots, m-1$), sont les racines m -ième de l'unité, on a de plus, $a_l = 0$ si $l \equiv \nu \pmod{k - \nu}$. On peut voir directement que

$$\max_{|z| \leq 1} |a_\nu z^\nu + a_k z^k| = |a_\nu| + |a_k|$$

et que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} (e^{\frac{-2i\pi j}{m}})^\mu f(e^{\frac{2i\pi \mu}{m}} z) \right| &\leq \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \left| f(e^{\frac{2i\pi \mu}{m}} z) \right| \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \max_{|z|=1} |f(z)| \\ &= \max_{|z|=1} |f(z)|, \end{aligned}$$

d'où provient le résultat.

Voici une variante due à Van-Der-Corput et Visser [11]. Soient $\frac{n}{2} < k \leq n$ et les $w_j = e^{\frac{2i\pi j}{k}}$, ($j = 0, \dots, k-1$), les racines k -ième de l'unité. Alors pour

tout polynôme $p \in \mathcal{P}_n$, si $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, on aura

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^k p(w_j z) = a_0 + a_k z^k,$$

à cause de l'hypothèse ($\frac{n}{2} < k \leq n$). Ainsi

$$\begin{aligned} |a_0| + |a_k| &= \max_{|z| \leq 1} |a_0 + a_k z^k| \\ &= \max_{|z| \leq 1} \left| \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k p(w_j z) \right| \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \max_{|z| \leq 1} |p(w_j z)| \\ &= \max_{|z| \leq 1} |p(z)|. \end{aligned}$$

Ceci nous donne à la fin

$$|a_0| + |a_k| \leq |p|_{\mathbb{D}}.$$

Cas d'égalité : Pour le cas $\frac{n}{2} < k < n$ tel que ($n > 1$), Dryanov et Fournier [4] ont montré que si k est pair, alors, on a égalité dans l'expression

$$|a_0| + \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lceil \frac{n}{k} \rceil + 2}\right) |a_k| \leq |p|_{\mathbb{D}}$$

si et seulement si $p(z)$ s'écrit de la forme

$$p(z) = |p|_{\mathbb{D}} \zeta_1 (1 - a(1 - \zeta_2^k) z^k Q(z)),$$

tel que $\zeta_1 \in \partial\mathbb{D}$, $\zeta_2 \in \partial\mathbb{D}$ et $Q \in \mathcal{P}_{n-k} \subseteq \mathcal{P}_{k-1}$ et on a

$$Q(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1} A_j(Q) z^j + A_{\frac{k}{2}} z^{\frac{k}{2}} + \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-1} \overline{A_j(Q)} z^{k-j},$$

avec $A_{\frac{k}{2}}(Q)$ réel, $\inf \Re[Q(z)] \geq \frac{1}{2}$ et $0 \leq a \leq 2 \inf_{z \in \mathbb{D}} \Re\left[\frac{1}{(1-z^k)Q(z)}\right]$. Si on a k impair, le résultat sera le même sauf que $Q(z)$ a la forme

$$Q(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} A_j(Q) z^j + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} \overline{A_j(Q)} z^{k-j}.$$

En effet, si on a p un polynôme en z à coefficients arbitraires a_k et de degré N avec $N \geq 2$, soit k un entier positif pair tel que $\frac{N}{2} < k < N$. Les $w_j = e^{\frac{2i\pi j}{k}}$, ($j = 1, \dots, k$), sont les racines k -ième de l'unité. Prenons $p_k(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k p(w_j z) = a_0 + a_k z^k$, alors

$$\begin{aligned} |a_0| + |a_k| &= \max_{|z| \leq 1} |p_k(z)| \\ &\leq \frac{1}{k} \max_{|z| \leq 1} \left| \sum_{j=0}^k p(w_j z) \right| \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \max_{|z| \leq 1} |p(w_j z)| \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |p|_{\mathbb{D}} \\ &= |p|_{\mathbb{D}} \end{aligned}$$

On travaille en supposant le cas d'égalité, c'est à dire $|a_0| + |a_k| = |p|_{\mathbb{D}}$; alors il suit du dernier résultat que $|p_k|_{\mathbb{D}} = |p|_{\mathbb{D}}$, et ainsi, il existe $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ tel que $|p_k(z_0)| = |p_k|_{\mathbb{D}}$. Donc

$$\begin{aligned} |p|_{\mathbb{D}} = |p_k|_{\mathbb{D}} = |p_k(z_0)| &= \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k p(w_j z_0) \right| \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |p(w_j z_0)| \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \max_{|z| \leq 1} |p(w_j z)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |p|_{\mathbb{D}} \\
&= |p|_{\mathbb{D}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\left| \sum_{j=1}^k p(w_j z_0) \right| = \sum_{j=1}^k |p(w_j z_0)|.$$

Ceci est vrai seulement si pour tout $j = 1, \dots, k$, $|p(w_j z_0)| = |p|_{\mathbb{D}}$ et il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $p(w_j z_0) = |p|_{\mathbb{D}} e^{i\phi}$. Soit le polynôme $T(Z) = p(Z) - |p|_{\mathbb{D}} e^{i\phi}$; il est de degré au plus N et s'annule en $w_j z_0$ pour tout $(j = 1, \dots, k)$, alors on peut écrire $T(Z)$ de la forme

$$T(Z) = p(Z) - |p|_{\mathbb{D}} e^{i\phi} = A \prod_{j=1}^k (Z - w_j z_0) Q(Z),$$

avec $A \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathcal{P}_{N-k} \subseteq \mathcal{P}_{k-1}$. Il est clair que Q ne s'annule jamais dans le disque unité, sinon, d'après le principe du module maximum, p devient constant et ceci est absurde. Puisque $|w_j z_0| = 1$ pour tout $(j = 1, \dots, k)$, alors on peut écrire

$$\prod_{j=1}^k (Z - w_j z_0) = (Z^k - z_0^k),$$

donc

$$p(Z) = |p|_{\mathbb{D}} e^{i\phi} - A(z_0^k - Z^k)Q(Z).$$

Supposons que $Q(0) = z_0^k = 1$, alors

$$p(z) = |p|_{\mathbb{D}} e^{i\phi} - A(1 - z^k)Q(z).$$

On a $a_0 = p(0) = |p|_{\mathbb{D}} e^{i\phi} - A$; puisque $Q(z)$ s'écrit de la forme $Q(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{k-1} z^{k-1}$, alors

$$p(z) = |p|_{\mathbb{D}} e^{i\phi} - A(1 - z^k)(1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{k-1} z^{k-1}),$$

et

$$a_k = A.$$

Il suit que

$$|a_0| + |a_k| = ||p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} - A| + |A| = |p|_{\mathbb{D}}$$

c'est à dire

$$||p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} - A| = |p|_{\mathbb{D}} - |A| = |pe^{i\phi}| - |A|.$$

Ceci est vrai seulement s'il existe un réel a tel que $0 \leq a \leq 1$ et $A = a|p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi}$.

Alors

$$p(z) = |p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} - a|p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi}(1 - z^k)Q(z),$$

et

$$p(z) = |p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi}[1 - a(1 - z^k)Q(z)].$$

Sans perte de généralité, on prend $|p|_{\mathbb{D}}e^{i\phi} = 1$; on aura

$$p(z) = 1 - a(1 - z^k)Q(z),$$

avec $Q \in \mathcal{P}_{k-1}$, $Q(0) = 1$ et $0 \leq a \leq 1$. Tout ça nous ramène à écrire que $a_0 = 1 - a$ et $a_k = a$, alors $|a_0| + |a_k| = |1 - a| + |a| = 1 - a + a = 1 = |p|_{\mathbb{D}}$. On peut voir aussi que $\Re\left(\frac{1}{(1-z^k)Q(z)}\right) > \frac{a}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, ceci se démontre par le lemme suivant :

2.1.2 Lemme : Si on a $|1 - X| \leq 1$, alors

$$\Re\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

preuve du lemme

Pour $X \in \{z : |1 - z| \leq 1\}$, on peut écrire X de la forme $X = 1 + pe^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $0 \leq p \leq 1$; alors

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{1 + pe^{i\theta}} = \frac{1 + pe^{-i\theta}}{|1 + pe^{i\theta}|^2},$$

donc

$$\Re\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1 + p \cos \theta}{1 + p^2 + 2p \cos \theta} \geq \frac{1}{2}.$$

Puisque $|1 - a(1 - z^k)Q(z)| \leq 1$ si $|z| < 1$, alors $\Re\left(\frac{1}{a(1-z^k)Q(z)}\right) \geq \frac{1}{2}$ si $|z| < 1$, d'où

$$\Re\left(\frac{1}{(1-z^k)Q(z)}\right) \geq \frac{a}{2}.$$

Maintenant, si on prend $J = \inf_{z \in \mathbb{D}} \Re\left(\frac{1}{(1-z^k)Q(z)}\right)$, alors $J \geq \frac{a}{2} \geq 0$, c'est à dire, $2J \geq a \geq 0$. Pour $z \in \partial\mathbb{D}$, on a $\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \Re\left(\frac{1}{(1-e^{ik\theta})Q(e^{i\theta})}\right) \geq 0$, puisque k s'écrit de la forme $k = 2\tilde{k}$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{1}{(1-e^{ik\theta})Q(e^{i\theta})}\right) &= \Re\left(\frac{1}{(1-e^{2i\tilde{k}\theta})Q(e^{i\theta})}\right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{e^{i\tilde{k}\theta}(e^{-i\tilde{k}\theta} - e^{i\tilde{k}\theta})Q(e^{i\theta})}\right) \\ &= \Re\left(\frac{e^{-i\tilde{k}\theta}Q(e^{i\theta})}{-2i \sin(\tilde{k}\theta)|Q(e^{i\theta})|^2}\right) \\ &= \Re\left(\frac{ie^{-i\tilde{k}\theta}Q(e^{i\theta})}{2 \sin(\tilde{k}\theta)|Q(e^{i\theta})|^2}\right) \\ &= -\Im\left(\frac{e^{-i\tilde{k}\theta}Q(e^{i\theta})}{2 \sin(\tilde{k}\theta)|Q(e^{i\theta})|^2}\right). \end{aligned}$$

$\Im(Q)$ est la partie imaginaire de Q . Sans perte de généralité, prenons $2|Q(e^{i\theta})|^2 = 1$; il suit que

$$\Re\left(\frac{1}{(1-e^{ik\theta})Q(e^{i\theta})}\right) = \Im\left(\frac{e^{-i\tilde{k}\theta}Q(e^{i\theta})}{\sin(\tilde{k}\theta)}\right).$$

Maintenant, écrivons $Q(z)$ de la forme $Q(z) = 1 + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q)z^j$ et tel que $A_j(Q) = |A_j(Q)|e^{i\theta_j}$ et essayons d'identifier les $A_j(Q)$, pour tout $j \in (1, \dots, 2\tilde{k}-1)$. Tout d'abord, on a $\Im\left(\frac{e^{-i\tilde{k}\theta}Q(e^{i\theta})}{\sin(\tilde{k}\theta)}\right) \geq 0$, alors

$$\Im\left(\frac{e^{-i\tilde{k}\theta}(1 + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)|e^{i\theta_j}e^{ij\theta})}{\sin(\tilde{k}\theta)}\right) \geq 0,$$

c'est à dire

$$\Im \left(\frac{e^{i\tilde{k}\theta} + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)| e^{i(\theta_j + j\theta + \tilde{k}\theta)}}{\sin(\tilde{k}\theta)} \right) \geq 0,$$

ce qui implique que

$$\frac{\sin \tilde{k}\theta + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)| \sin(\theta_j + j\theta + \tilde{k}\theta)}{\sin \tilde{k}\theta} \geq 0.$$

Ainsi

$$1 + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)| \left(\frac{\sin((j - \tilde{k})\theta + \theta_j) \cos(2\tilde{k}\theta)}{\sin(\tilde{k}\theta)} + \frac{\cos((j - \tilde{k})\theta + \theta_j) \sin(2\tilde{k}\theta)}{\sin(\tilde{k}\theta)} \right) \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & 1 + 2 \cos(\tilde{k}\theta) \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)| \cos((j - \tilde{k})\theta + \theta_j) + \\ & \frac{1 - 2 \sin(\tilde{k}\theta)^2}{\sin(\tilde{k}\theta)} \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)| \sin((j - \tilde{k})\theta + \theta_j) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ici, on considère un polynôme trigonométrique

$$g_1(\theta) = 1 + 2 \cos(\tilde{k}\theta) \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)| \cos((j - \tilde{k})\theta + \theta_j),$$

donc il est fini pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Par contre, pour l'autre partie

$$g_2(\theta) = \frac{1 - 2 \sin(\tilde{k}\theta)^2}{\sin(\tilde{k}\theta)} \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)| \sin((j - \tilde{k})\theta + \theta_j),$$

elle peut tendre vers l'infini, ce qui est absurde. Regardons le polynôme trigonométrique $t(\theta) = \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} |A_j(Q)| \sin((j - \tilde{k})\theta + \theta_j)$. Il est de degré au plus $\tilde{k} - 1$, alors il doit avoir au plus $2\tilde{k} - 1$ zéros, mais remarquons que si θ tend vers $\frac{m\pi}{\tilde{k}}$, pour tout $m \in (0, \dots, 2\tilde{k} - 1)$, $\frac{1 - 2 \sin(\tilde{k}\theta)^2}{\sin(\tilde{k}\theta)}$ tend vers l'infini, alors,

pour que $g_2(\theta)$ reste finie, il faut que $t(\theta) = 0$ pour $\theta = \frac{m\pi}{\tilde{k}}$ et ceci pour tout $m \in (0, \dots, 2\tilde{k} - 1)$, donc, dans ce cas, on aura $2\tilde{k}$ zéros pour t et par conséquent, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$t(\theta) = 0.$$

Puisque $t(\theta) = \Im \left(\sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{i(j-\tilde{k})\theta} \right) = 0$, alors $\sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{i(j-\tilde{k})\theta}$ est réel pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et on aura que $A_j(Q) = \overline{A_{2\tilde{k}-j}(Q)}$, ($j = 1, \dots, \tilde{k}$). En effet, si on fait un changement d'indice et on pose $l = j - \tilde{k}$, on aura,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{i(j-\tilde{k})\theta} &= \sum_{l=1-\tilde{k}}^{\tilde{k}-1} A_{l+\tilde{k}}(Q) e^{il\theta} \\ &= \overline{\sum_{l=1-\tilde{k}}^{\tilde{k}-1} A_{l+\tilde{k}}(Q) e^{il\theta}} \\ &= \sum_{l=1-\tilde{k}}^{\tilde{k}-1} \overline{A_{l+\tilde{k}}(Q)} e^{-il\theta} \end{aligned}$$

Par identification, on trouve que $A_{l+\tilde{k}}(Q) = \overline{A_{-l+\tilde{k}}(Q)}$; alors

$$A_j(Q) = \overline{A_{2\tilde{k}-j}(Q)},$$

pour tout $j \in (1, \dots, \tilde{k})$. Revenons maintenant à (2.1), on a donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} 2 \cos(\tilde{k}\theta) |A_j(Q)| \cos((j-\tilde{k})\theta + \theta_j) \\ &\leq \Re \left(1 + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} 2 \cos(\tilde{k}\theta) A_j(Q) e^{i(j-\tilde{k})\theta} \right) \\ &\leq \Re \left(1 + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{ij\theta} + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{i(j-2\tilde{k})\theta} \right). \end{aligned}$$

On refait un autre changement d'indice et on prend $l = 2\tilde{k} - j$. Ainsi

$$\sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{i(j-2\tilde{k})\theta} = \sum_{l=1}^{2\tilde{k}-1} A_{2\tilde{k}-l}(Q) e^{-il\theta} = \sum_{l=1}^{2\tilde{k}-1} \overline{A_l(Q)} e^{-il\theta},$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Re \left(1 + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{ij\theta} + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} \overline{A_j(Q)} e^{-ij\theta} \right) \\ &\leq \Re \left(1 + 2\Re \left(\sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{ij\theta} \right) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\Re \left(1 + \sum_{j=1}^{2\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{ij\theta} \right) \geq \frac{1}{2},$$

d'où

$$\Re \left(1 + \sum_{j=1}^{\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{ij\theta} + A_{\tilde{k}}(Q) e^{i\tilde{k}\theta} + \sum_{j=1}^{\tilde{k}-1} A_j(Q) e^{i(j-2\tilde{k})\theta} \right) \geq \frac{1}{2},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Le résultat suit pour k pair.

Pour k impair, on refait la même démarche, mais on aura un nouveau $Q(z)$ de la forme

$$Q(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} A_j(Q) z^j + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} \overline{A_j(Q)} z^{k-j}.$$

Avant de terminer ce chapitre, on peut voir un résultat ; soit $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ et posons $M_k = \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lceil \frac{n}{k} \rceil + 2}\right)$. Si $g(z) = p(M_k^{-\frac{1}{k}} z) = a_0 + \dots + a_k M_k^{-1} z^k + \dots$, d'après Dryanov et Fournier [5, pp. 331-340], on a , en appliquant au polynôme g l'inégalité centrale de ce chapitre,

$$|a_0| + M_k |a_k M_k^{-1}| \leq \max_{|z| \leq 1} |g(z)| = \max_{|z|=M_k^{-\frac{1}{k}}} |p(z)|,$$

i.e.,

$$|a_0| + |a_k| \leq \max_{|z|=(2 \cos(\frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 2}))^{\frac{1}{k}}} |p(z)|$$

où on a $2 \cos(\frac{\pi}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 2}) > 1$ si $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

Chapitre 3

Quelques inégalités pour les coefficients de séries de puissances

Dans ce chapitre, on va montrer quelques inégalités pour les coefficients de séries de puissances un peu analogues à l'inégalité de Visser pour les polynômes.

Résultat I

Si on a $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une fonction holomorphe dans le disque unité \mathbb{D} et telle que $f(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, alors pour tout $k \geq 1$,

$$|a_k| \leq 1 - |a_0|^2,$$

avec égalité si et seulement si $f(z) = e^{i\gamma} \frac{z^k + \alpha}{1 + \overline{\alpha} z^k}$, tel que $|\alpha| \leq 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Preuve :

Avant de résoudre ce problème d'une façon générale, on va essayer de le faire pour le cas où $k = 1$. Soit $F(z) = \frac{f(z) - a_0}{1 - \overline{a_0} f(z)}$; c'est une transformation de Moebius de la fonction f . Il est clair que F est holomorphe dans \mathbb{D} , que $F(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ et que $F(0) = 0$. Alors, d'après le lemme de Schwarz, on a $|F'(0)| \leq 1$ et l'inégalité tient si et seulement si $F(z) = e^{i\psi} z$ avec $\psi \in \mathbb{R}$. Or $F'(z) = \frac{1 - |a_0|^2}{(1 - \overline{a_0} f(z))^2} f'(z)$, donc

$$F'(0) = \frac{1 - |a_0|^2}{(1 - |a_0|^2)^2} a_1 = \frac{a_1}{1 - |a_0|^2},$$

et

$$|F'(0)| = \frac{|a_1|}{1 - |a_0|^2} \leq 1.$$

Il suit que $|a_1| \leq 1 - |a_0|^2$ et on a égalité si et seulement si

$$F(z) = \frac{f(z) - a_0}{1 - \overline{a_0}f(z)} = e^{i\psi}$$

avec $\psi \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{i\psi}z + a_0}{1 + \overline{a_0}e^{i\psi}z} \\ &= e^{i\psi} \frac{z + a_0e^{-i\psi}}{1 + \overline{a_0}e^{i\psi}z}, \end{aligned}$$

telle que $|a_0e^{-i\psi}| \leq 1$.

Pour le cas où $k > 1$, prenons tout d'abord $w_j = e^{\frac{2i\pi j}{k}}$, ($j = 1, \dots, k$), les racines k -ième de l'unité. Soit $F(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f(e^{\frac{2i\pi j}{k}}z)$. Elle est holomorphe dans \mathbb{D} et on a $F(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, alors

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{t=0}^{\infty} a_t e^{\frac{2i\pi jt}{k}} z^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (e^{\frac{2i\pi jt}{k}})^j \right) a_t z^t. \end{aligned}$$

Posons $I = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (e^{\frac{2i\pi jt}{k}})^j$, donc on a

$$I = \frac{1}{k} e^{\frac{2i\pi t}{k}} \frac{1 - (e^{\frac{2i\pi t}{k}})^k}{1 - e^{\frac{2i\pi t}{k}}} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \pmod{k} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

il s'ensuit que $F(z) = a_0 + a_k z^k + a_{2k} z^{2k} + \dots$, alors $F(z^{\frac{1}{k}}) = a_0 + a_k z + a_{2k} z^2 + \dots$; cette fonction est holomorphe dans \mathbb{D} et $F(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, alors en appliquant le résultat du premier cas à la fonction $F(z^{\frac{1}{k}})$, on a

$$|a_k| \leq 1 - |a_0|^2.$$

Ensuite, si on travaille en supposant le cas d'égalité, on aura

$$F(z^{\frac{1}{k}}) = e^{i\psi} \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z},$$

avec $|\alpha| \leq 1$, ce qui donne

$$F(z) = e^{i\psi} \frac{z^k + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z^k}.$$

Maintenant, pour tout $u \in \mathbb{D}$, soit la fonction $g(u) = f(w_j u)$, elle est analytique bornée. Ainsi $\lim_{u \rightarrow e^{i\theta}} f(w_j u)$, la limite radiale, existe presque partout $\theta \in [0, 2\pi]$, posons $f(w_j e^{i\theta})$ cette limite; il est bien connu [3, pp. 24] que $|f(w_j e^{i\theta})| = 1$, pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$, par conséquent $\lim_{u \rightarrow e^{i\theta}} F(u) := F(e^{i\theta})$ existe presque partout et $|F(e^{i\theta})| = 1$. Donc

$$\begin{aligned} |F(e^{i\theta})| &= 1 \\ &= \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f(w_j e^{i\theta}) \right| \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |f(w_j e^{i\theta})| \\ &= 1, \end{aligned}$$

d'où pour tout j , $f(w_j e^{i\theta}) = e^{i\phi(\theta)}$ presque partout. De plus $\lim_{u \rightarrow e^{i\theta}} \frac{f(w_j u)}{f(w_l u)} = 1$, pour tout j et l . Il est aussi bien connu [3, pp. 22] que $f(w_j z) = f(w_l z)$ pour tout $|z| < 1$ avec j et $l \in (1, \dots, k)$, alors

$$f(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f(w_j z) = f(w_m z),$$

pour tout $(m = 1, \dots, k)$, donc

$$F(z) = f(w_l z) = f(z) = e^{i\psi} \frac{z^k + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z^k},$$

avec $|\alpha| \leq 1$ et $\psi \in \mathbb{R}$.

Résultat II

Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une fonction holomorphe dans \mathbb{D} et telle que $f(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, alors pour tout $k \geq 1$

$$|a_0| + |a_k| \leq \frac{5}{4}.$$

Preuve :

Commençons par le cas $k = 1$; on a d'après résultat **I**, $|a_0| + |a_1| \leq |a_0| + 1 - |a_0|^2$, puisque $|a_0| \leq 1$, alors la fonction $g(|a_0|) = -|a_0|^2 + |a_0| + 1$ atteint son maximum pour $|a_0| = \frac{1}{2}$ et on a $|a_0| + |a_1| \leq \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Montrons maintenant que $\frac{5}{4}$ est la meilleure borne pour cette inégalité : Si on prend $f(z) = e^{i\gamma} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $|a| = \frac{1}{2}$, alors $a_0 = -ae^{i\gamma}$ et $|a_0| = |a| = \frac{1}{2}$. Puisque $f(z) = -ae^{i\gamma} + e^{i\gamma}(1-|a|^2)z + \dots$, alors $|a_0| + |a_1| = -|a|^2 + |a| + 1 = \frac{5}{4}$, d'où on a le résultat pour $k = 1$.

Pour le cas où $k > 1$, tout d'abord, on a d'après le résultat **I**, $|a_0| + |a_k| \leq |a_0| + 1 - |a_0|^2 \leq \frac{5}{4}$. Donc pour montrer que $\frac{5}{4}$ est la meilleure borne pour cette inégalité, on prend $f(z) = e^{i\psi} \frac{z^k + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z^k}$ et tel que $|a_0| = \alpha e^{i\psi}$ et $|a_0| = |\alpha| = \frac{1}{2}$, ainsi

$$f(z) = \alpha e^{i\psi} + \dots + e^{i\psi}(1 - |a_0|^2)z^k + \dots,$$

alors, on a $|a_0| + |a_k| = |\alpha| + 1 - |a_0|^2 = |a_0| + 1 - |a_0|^2 = \frac{5}{4}$, d'où $\frac{5}{4}$ est la meilleure borne pour notre inégalité.

Résultat III

Soit $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ un polynôme à coefficients complexes arbitraires. Pour tout j, k tels que $1 \leq j < k \leq n$

$$|a_j| + |a_k| \leq \frac{4}{\pi} \max_{|z| \leq 1} |p(z)|.$$

Preuve :

Nous reproduisons l'argument trouvé dans [8, pp. 638]. Soit $p(z)$ un polynôme de degré au plus n ; sans perte de généralité, on prend $\max_{|z|=1} |p(z)| = 1$. Soient α et $\beta \in [-\pi, \pi)$ et tels que $a_j e^{ij\alpha} + a_k e^{ik\alpha} = (|a_k| + |a_j|)e^{i\beta}$, c'est à

dire,

$$|a_k| + |a_j| = e^{-i\beta}(a_j e^{ij\alpha} + a_k e^{ik\alpha}).$$

On va diviser le travail en deux, on prendra tout d'abord le cas $|p(z)| = 1$ pour tout $|z| = 1$; soient alors $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ les zéros de p avec $l \leq n$ et considérons la fonction $g(z) = \frac{p(z)}{\prod_{j=1}^l \frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z}}$. La fonction g est bien définie dans \mathbb{D} et on a $|g(z)| = 1$ pour $|z| = 1$ et $g(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$, alors, par le principe du maximum $|g(z)| \leq 1$ pour tout $|z| \leq 1$. En plus, on a $\frac{1}{|g(z)|} = 1$ si $|z| = 1$, alors $\frac{1}{|g(z)|} \leq 1$ si $|z| \leq 1$. Le fait que $|g(z)| \leq 1$ et $\frac{1}{|g(z)|} \leq 1$ pour $|z| \leq 1$ nous donne que $|g(z)| = 1$ pour tout $|z| \leq 1$, donc $g(z) = K$ avec $z \in \mathbb{D}$, $K \in \mathbb{C}$ et $|K| = 1$, doù

$$p(z) = K = \prod_{j=1}^l \frac{z - \alpha_j}{1 - \bar{\alpha}_j z}.$$

Étant donné que p est un polynôme, alors $\alpha_j = 0$ pour tout $j \in (1, \dots, l)$, alors

$$p(z) = Kz^l = a_l z^l,$$

donc pour tout j et $k \in (1, \dots, n)$, avec $j \neq k$, on a

$$|a_j| + |a_k| \leq 1 < \frac{4}{\pi}.$$

Maintenant, on considère le second cas, ainsi on a $|p(e^{i(\theta_0+\alpha)})| = \lambda < 1$ pour certains $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$. Puisque p est continue, alors pour $\epsilon = \frac{1-\lambda}{2} > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|\theta - \theta_0| < \delta$, alors

$$|p(e^{i(\theta+\alpha)}) - p(e^{i(\theta_0+\alpha)})| < \frac{1-\lambda}{2},$$

par conséquent,

$$|p(e^{i(\theta+\alpha)})| - |p(e^{i(\theta_0+\alpha)})| < \frac{1-\lambda}{2},$$

donc

$$|p(e^{i(\theta+\alpha)})| < \frac{1+\lambda}{2} < 1.$$

On pose $\phi(z) = p(ze^{i\alpha}) = \sum_{j=0}^n a_j e^{i\alpha j} z^j$; la formule de Cauchy donne

$$\begin{aligned} a_k e^{i\alpha k} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\phi(z)}{z^{k+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{p(ze^{i\alpha})}{z^{k+1}} dz, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |a_j| + |a_k| &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{-i\beta} p(ze^{i\alpha}) \left(\frac{1}{z^{j+1}} + \frac{1}{z^{k+1}} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{-i\beta} p(ze^{i\alpha}) (z^{-j-1} + z^{-k-1}) dz. \end{aligned}$$

Puisque $e^{i\theta(-j-1)} + e^{i\theta(-k-1)} = 2 \cos\left(\theta \frac{j+k}{2}\right) e^{-i\frac{\theta(j+k)}{2}} e^{i\theta}$, donc

$$\begin{aligned} |a_j| + |a_k| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{-i\beta} e^{-i\frac{\theta(j+k)}{2}} p(e^{i(\theta+\alpha)}) \right| \left| \cos \frac{k-j}{2} \theta \right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0-\delta+2\pi} |p(e^{i(\theta+\alpha)})| \left| \cos \frac{k-j}{2} \theta \right| d\theta \\ &< \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0-\delta+2\pi} \left| \cos \frac{k-j}{2} \theta \right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos \frac{k-j}{2} \theta \right| d\theta \\ &= \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

En effet, pour le dernier résultat, on a $\int_{-\pi}^0 |\cos \frac{k-j}{2} \theta| d\theta = \int_0^{\pi} |\cos \frac{k-j}{2} \theta| d\theta$. Posons $\zeta = k - j$; tout d'abord, on peut remarquer que la fonction $\psi(\theta) = |\cos \frac{\zeta\theta}{2}|$ est $\frac{2\pi}{\zeta}$ -périodique, alors on a pour tout m et $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\frac{m\pi}{\zeta}}^{\frac{(m+2)\pi}{\zeta}} |\cos \frac{\zeta\theta}{2}| d\theta = \int_{\frac{n\pi}{\zeta}}^{\frac{(n+2)\pi}{\zeta}} |\cos \frac{\zeta\theta}{2}| d\theta,$$

encore, si on suppose que ζ est pair, donc $\frac{\zeta}{2} \in \mathbb{N}$ et on a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta &= \int_0^{\frac{2\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta + \cdots + \int_{\frac{(\zeta-2)\pi}{\zeta}}^\pi \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta \\ &= \frac{\zeta}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta. \end{aligned}$$

Cherchons $\int_0^{\frac{2\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta$; on a si $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{\zeta}$ alors $0 \leq \frac{\zeta\theta}{2} \leq \pi$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{\zeta}} \cos \frac{\zeta\theta}{2} d\theta - \int_{\frac{\pi}{\zeta}}^{\frac{2\pi}{\zeta}} \cos \frac{\zeta\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{2}{\zeta} \left[\sin \frac{\zeta\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{\zeta}} - \frac{2}{\zeta} \left[\sin \frac{\zeta\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{\zeta}}^{\frac{2\pi}{\zeta}} \\ &= \frac{2}{\zeta} + \frac{2}{\zeta} \\ &= \frac{4}{\zeta}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^\pi \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta = \frac{\zeta}{2} \frac{4}{\zeta} = 2,$$

d'où le résultat. Si on prend le cas ζ impair, alors

$$\int_0^\pi \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta + \cdots + \int_{\frac{(\zeta-3)\pi}{\zeta}}^{\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta + \int_{\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}}^\pi \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta.$$

Si $\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta} \leq \theta \leq \pi$ donc $\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta} \leq \frac{\zeta\theta}{2} \leq \frac{\zeta\pi}{2}$; ici on prend les deux cas, si ζ s'écrit de la forme $\zeta = 4\alpha + 1$ tel que $\alpha \in \mathbb{N}$, c'est à dire $\cos \frac{\zeta\theta}{2} \leq 0$ pour $\theta \in [\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}, \pi]$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta &= \int_0^{\frac{2\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta + \cdots + \int_{\frac{(\zeta-3)\pi}{\zeta}}^{\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta + \int_{\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}}^\pi \cos \frac{\zeta\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\zeta-1}{2} \frac{4}{\zeta} + \frac{2}{\zeta} \left[\sin \frac{\zeta\theta}{2} \right]_{\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}}^\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(\zeta - 1)}{\zeta} + \frac{2}{\zeta} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Maintenant, si on prend le cas où $\zeta = 4\alpha - 1$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $\cos \frac{\zeta\theta}{2} \geq 0$ pour $\theta \in [\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}, \pi]$, il suit que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta &= \int_0^{\frac{2\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta + \cdots + \int_{\frac{(\zeta-3)\pi}{\zeta}}^{\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}} \left| \cos \frac{\zeta\theta}{2} \right| d\theta - \int_{\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}}^\pi \cos \frac{\zeta\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{\zeta - 1}{2} \frac{4}{\zeta} - \frac{2}{\zeta} \left[\sin \frac{\zeta\theta}{2} \right]_{\frac{(\zeta-1)\pi}{\zeta}}^\pi \\
&= \frac{2(\zeta - 1)}{\zeta} - \left(-\frac{2}{\zeta} \right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

d'où on aura le même résultat pour ζ impair.

Après ce travail, on doit montrer que $\frac{4}{\pi}$ est la meilleure borne supérieure pour cette inégalité. Pour ce faire, on considère $g(\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}}$ avec $|\theta| < \pi$ et sa série de Fourier $g(\theta) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu e^{i\mu\theta}$, alors on a $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{i\frac{\theta}{2}} d\theta = 2\pi$ et $c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-i\frac{\theta}{2}} d\theta = 2\pi$. Soit $D_m = \sum_{\mu=-m}^\mu e^{i\mu\theta} = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$ le noyau de Dirichlet, ainsi la m -ième somme partielle de série de Fourier de g est

$$S_m(\theta) = S_m(\theta, g) = \sum_{\mu=-m}^m c_{\mu} e^{i\mu\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi g(\phi) D_\mu(\theta - \phi) d\phi$$

et la moyenne arithmétique des sommes partielles est

$$\sigma_\theta = \sigma_m(\theta, g) = \frac{S_0 + \cdots + S_m(\theta)}{m+1} = \sum_{\nu=-m}^m \frac{m+1-|\nu|}{m+1} c_\nu e^{i\nu\theta}.$$

On a $|g(\theta)| \leq 1$ et alors $|\sigma_m(\theta)| \leq 1$; en effet, soit

$$K_n(\theta) = \frac{1}{m+1} \sum_{\mu=0}^m D_\mu(\theta) = \frac{1}{m+1} \frac{1 - \cos(m+1)\theta}{1 - \cos\theta}$$

le noyau de Fejér. Il est clair que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $K_m(\theta) \geq 0$, en plus on a

$$(1 - \cos \theta) \left((m+1) + 2 \sum_{\mu=1}^m (m+1-\mu) \cos \mu\theta \right) = 1 - \cos(m+1)\theta$$

alors

$$K_m(\theta) = 1 + 2 \sum_{\mu=1}^m \left(1 - \frac{\mu}{m+1}\right) \cos \mu\theta$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(\theta) d\theta = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{S_0(\theta) + \dots + S_m(\theta)}{m+1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{m+1} \left(\sum_{\mu=0}^m \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) D_\mu(\theta - \phi) d\phi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \left(\frac{1}{m+1} \sum_{\mu=0}^m D_\mu(\theta - \phi) \right) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) K_m(\theta - \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \phi) K_m(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\sigma_\theta| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta - \phi)| |K_m(\phi)| d\phi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(\phi) d\phi \\ &= 1, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité. Alors,

$$\left| \sum_{\nu=-m}^m \frac{m+1-|\nu|}{m+1} c_\nu e^{i\nu\theta} \right| \leq 1,$$

et ainsi, en posant $\alpha_m(z) = \sum_{\nu=-m}^m b_\nu z^\nu$ tel que $b_\nu = \frac{m+1-|\nu|}{m+1}$, on aura $|\alpha_m| \leq 1$ pour tout $-\pi \leq \theta \leq \pi$ et $|b_0| + |b_1| = |c_0| + \frac{m}{m+1}|c_1| = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi(m+1)}$. Soit $b'_\nu = b_{\nu-m}$ tel que $0 \leq \nu \leq 2m$, alors

$$p(z) = z^m \alpha_m(z) = \sum_{\nu=0}^{2m} b'_\nu z^\nu$$

est un polynôme de degré au plus $2m$ et on a $|p(z)| \leq 1$ pour $|z| = 1$ et $|b'_m| + |b'_{m+1}| \geq \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi(m+1)}$.

Tout ceci nous amène à affirmer que pour tout $\epsilon > 0$, on peut toujours trouver un polynôme p de degré au plus $2m$ tel que $|p(z)| \leq 1$ pour $|z| \leq 1$ et tel que $|b'_m| + |b'_{m+1}| \geq \frac{4}{\pi} - \epsilon$. Alors $\frac{4}{\pi}$ est la meilleure borne pour notre inégalité.

Remarque :

On a vu que le Résultat **III** est vrai pour tout polynôme, mais c'est aussi vrai pour toute fonction analytique : il suffit en effet de considérer pour $0 < r < 1$ fixe la fonction $f(rz)$ ainsi que ses sommes partielles (qui sont des polynômes!).

Chapitre 4

L'extension de Dryanov et Fournier

Dans ce chapitre, on montrera comment on a trouvé la meilleure constante $m = m_k$ telle que si $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, on ait pour tout $1 \leq k \leq n$

$$|a_0| + m_k|a_k| \leq |p|_{\mathbb{D}}.$$

Il s'agit d'un résultat dû à Dryanov et Fournier [5, pp. 331-340]. La motivation pour la recherche d'une telle inégalité est le fait que la meilleure borne supérieure pour $\frac{(|a_0|+|a_k|)}{|p|_{\mathbb{D}}}$ n'est toujours pas connue.

4.1 Théorème : *Soit p un polynôme de degré au plus n et qui s'écrit de la forme $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, tel que $a_i \in \mathbb{C}$. Alors si pour tout $1 \leq k \leq n$, on définit*

$$\lambda_{n,k} = \sup \{ |\lambda| \text{ tels que pour } p \in \mathcal{P}_n, \text{ on a } |a_0| + |\lambda||a_k| \leq M_p \},$$

on a $\lambda_{n,k} = \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lceil \frac{n}{k} \rceil + 2}\right)$ avec $M_p = \sup_{|z| \leq 1} |p(z)|$. On a l'égalité

$$|a_0| + \lambda_{n,k}|a_k| = M_p,$$

lorsque $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, si et seulement si pour $k = 1$ et $n = 1$, $p \in \mathcal{P}_1$ ou bien $p(z) \equiv a_0(p)$ si $n \geq 2$ et $k \geq 1$.

Démonstration du théorème :

Soit $p \in \mathcal{P}_n$ à coefficients complexes arbitraires,

$$p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n.$$

Dans notre cas, on va diviser notre travail en deux, tout d'abord commençons par le cas où $k = 1$. La première chose qu'on peut voir est que $\sup B = \sup A$ si

$$A = \{\mu > 0 \text{ tels que pour } p \in \mathcal{P}_n \text{ on a } |a_0| + \mu|a_1| \leq M_p\}$$

et

$$B = \{\mu > 0 \text{ tels que pour } z \in \mathbb{D} \text{ et } p \in \mathcal{P}_n, \text{ on a } |a_0 + \mu a_1 z| \leq M_p\}.$$

En effet, si $\mu \in A$, alors $|a_0| + \mu|a_1| \leq M_p$, ainsi pour $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned} |a_0 + \mu a_1 z| &\leq |a_0| + \mu|a_1 z| \\ &\leq |a_0| + \mu|a_1| \\ &\leq M_p, \end{aligned}$$

donc $\mu \in B$. D'autre part, si on prend μ dans B , donc $|a_0 + \mu a_1 z| \leq M_p$. Ceci est vrai aussi pour $z \in \partial\mathbb{D}$, alors soit $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ tel que $\arg(z_0) + \arg(a_1) = \arg(a_0) = \alpha$, il suit que

$$\begin{aligned} |a_0 + \mu a_1 z| &= ||a_0|e^{i\alpha} + \mu|a_1|e^i| \\ &= |a_0| + \mu|a_1| \\ &\leq M_p, \end{aligned}$$

d'où $\mu \in A$; on aura à la fin que $A \equiv B$, ce qui implique que $\sup A = \sup B$.

Maintenant, si on a $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j(f)z^j$ et $g(z) = \sum_{j \geq 0} a_j(g)z^j$ deux fonctions analytiques holomorphes dans le disque unité, alors le produit d'Hadamard de f et g est $f * g(z) = \sum_{j \geq 0} a_j(f)a_j(g)z^j$. Ainsi $f * g(z)$ est holomorphe aussi sur \mathbb{D} . On a $\sup A \geq \frac{1}{2}$: en effet, d'après la formule de Herglotz, on a

pour tout $k \geq 1$ et $z \in \mathbb{D}$

$$1 + \frac{1}{2}z^k = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{1 - \gamma z} d\mu(\gamma).$$

Ainsi

$$1 + \frac{1}{2}z = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{1 - \gamma z} d\mu(\gamma),$$

où μ est une mesure de probabilité sur $\partial\mathbb{D}$ et

$$p * (1 + \frac{1}{2}z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{1 - \gamma z} d\mu(\gamma) * p,$$

c'est-à-dire

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1z = \int_{\mathbb{D}} p(\gamma z) d\mu(\gamma),$$

et encore

$$\begin{aligned} |a_0 + \frac{1}{2}a_1z| &= \left| \int_{\mathbb{D}} p(\gamma z) d\mu(\gamma) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} |p(\gamma z)| d\mu(\gamma) \\ &\leq |p|_{\mathbb{D}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup B = \sup A \geq \frac{1}{2}.$$

Après ces vérifications, calculons $\lambda_{n,1}$. Prenons tout d'abord une matrice carrée $(\mathbf{M}_{\mathbf{m}+1})_\lambda$ d'ordre $m+1$ sous cette forme

$$(\mathbf{M}_{\mathbf{m}+1})_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \dots \\ \lambda & 1 & \lambda & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \lambda \\ \vdots & \vdots & \lambda & \ddots \end{pmatrix}.$$

Puisque dire que

$$\max_{|z| \leq 1} |a_0 + \lambda a_1 z| \leq M_p$$

avec $p \in \mathcal{P}_n$ est équivalent à

$$\max_{|z| \leq 1} |(1 + \lambda z + o(z^n)) * p(z)| \leq M_p,$$

alors dans ce cas, il suffit de montrer que $1 + \lambda z + o(z^n)$ est un opérateur polynomial préservant la norme dans \mathcal{P}_n . Si on écrit $a_0 + \lambda a_1 z$ de la forme

$$a_0 + \lambda a_1 z = \sum_{i=0}^n A_i(n) a_k z^i,$$

tel que $A_0(n) = 1$, $A_1(n) = \lambda$ et $A_i(n) = 0$ pour $i \geq 2$, d'après le théorème de Szász [5, pp. 330], pour avoir le dernier résultat, il faut et il suffit que la forme hermitienne $(z_0, \dots, z_n) \mapsto \sum_{\nu, \mu=0}^n A_{\nu-\mu}(n) z_\nu \overline{z_\mu}$ soit semi-définie positive (ici, pour tout i , $A_{-i}(n) = \overline{A_i(n)}$). Pour avoir ceci, on démontre que les mineurs principaux de notre forme sont positifs. Remarquons que

$$\det((\mathbf{M}_j)_\lambda) = \det((\mathbf{M}_{j-1})_\lambda) - \lambda^2 \det((\mathbf{M}_{j-2})_\lambda),$$

si $3 \leq j \leq n+1$. Montrons ce résultat par récurrence, en effet, on a

$$\det(\mathbf{M}_3)_\lambda = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda^2,$$

$$\det(\mathbf{M}_2)_\lambda = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2,$$

et

$$\det(\mathbf{M}_1)_\lambda = |1| = 1,$$

alors on a le résultat pour $j = 3$.

Supposons que c'est vrai pour j , montrons que c'est aussi vrai pour $j+1$.

On a

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{M}_{j+1})_\lambda &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & \dots \\ \lambda & 1 & \lambda & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \lambda \\ \vdots & \vdots & \lambda & \ddots \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \dots \\ \lambda & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \vdots & \lambda & \ddots \end{vmatrix} \\
&= \det(\mathbf{M}_j)_\lambda - \lambda \det(\mathbf{M}_{j-1})_\lambda \\
&= \det(\mathbf{M}_j)_\lambda - \lambda^2 \det(\mathbf{M}_{j-1})_\lambda
\end{aligned}$$

d'où pour tout $j = 3, \dots, n+1$

$$\det((\mathbf{M}_j)_\lambda) = \det((\mathbf{M}_{j-1})_\lambda) - \lambda^2 \det((\mathbf{M}_{j-2})_\lambda).$$

Alors si on écrit $\det((\mathbf{M}_j)_\lambda)$ sous la forme $\det((\mathbf{M}_j)_\lambda) = a_j = c^{j+1}$, on aura

$$c^{j+1} = c^j - \lambda^2 c^{j-1},$$

et

$$c^2 - c + \lambda^2 = 0.$$

Pour $\lambda \neq \{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\}$, on a deux solutions c_1 et c_2 , alors

$$a_j = A c_1^{j+1} + B c_2^{j+1}$$

avec A et $B \in \mathbb{C}$. Ainsi, si on prend $A = \frac{1}{c_1 - c_2}$ et $B = \frac{-1}{c_1 - c_2}$, on aura

$$a_j = \det((\mathbf{M}_j)_\lambda) = \frac{c_1^{j+1} - c_2^{j+1}}{c_1 - c_2}.$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = \frac{-1}{2}$, on a $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ et $\det((\mathbf{M}_j)_{\frac{1}{2}}) = \frac{j+1}{2^j}$. En effet,

par récurrence, pour $j = 1$, $\det((\mathbf{M}_1)_{\frac{1}{2}}) = 1 = \frac{1+1}{2}$. Supposons que c'est vrai pour k et montrons l'égalité pour $k + 1$; puisque

$$\begin{aligned} \det((\mathbf{M}_{k+1})_{\frac{1}{2}}) &= \det((\mathbf{M}_k)_{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4} \det((\mathbf{M}_{k-1})_{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{k+1}{2^k} - \frac{1}{4} \frac{k}{2^{k-1}} \\ &= \frac{2k+2-k}{2^{k+1}} \\ &= \frac{k+2}{2^{k+1}}, \end{aligned}$$

on a

$$\det((\mathbf{M}_j)_\lambda) = \begin{cases} \frac{c_1^{j+1} - c_2^{j+1}}{c_1 - c_2} & \text{si } \lambda \neq \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \\ \frac{j+1}{2^j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Écrivons λ de la forme $\lambda = \frac{1}{2 \cos \psi}$, alors $c^2 - c + \frac{1}{4 \cos \psi} = 0$, donc

$$c_1 = \overline{c_2} = \frac{e^{-i\psi}}{2 \cos \psi},$$

ce qui donne

$$\det((\mathbf{M}_j)_{\frac{1}{2 \cos \psi}}) = \begin{cases} \frac{\sin(j+1)\psi}{2^j \sin \psi (\cos \psi)^j} & \text{si } \psi \neq 0 \pmod{\pi} \\ \frac{j+1}{2^j} & \text{sinon,} \end{cases}$$

si $\det((\mathbf{M}_j)_{\frac{1}{2 \cos \psi}}) = 0$, donc $\sin(j+1)\psi = 0$ et ceci est équivalent à dire que $\psi = \frac{k\pi}{j+1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Encore si $\psi = 0$, alors $\det((\mathbf{M}_{j+1})_{\frac{1}{2 \cos \psi}}) = \frac{j+2}{2^{j+1}}$ et pour $\psi = \frac{\pi}{j+2}$, $\det((\mathbf{M}_{j+1})_{\frac{1}{2 \cos \psi}}) = 0$, donc pour $0 \leq \psi < \frac{\pi}{j+2}$, on a

$$\det((\mathbf{M}_{j+1})_{\frac{1}{2 \cos \psi}}) > 0.$$

De plus $\cos \frac{\pi}{j+2} < \cos \psi \leq 1$, d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2 \cos \psi} < \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{j+2}}$, alors pour tout $\frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{j+2}}$,

$$\det((\mathbf{M}_{j+1})_\lambda) > 0,$$

et

$$\det((\mathbf{M}_{j+1})_{\frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{j+2}}}) = 0.$$

Tout ceci implique que

$$\lambda_{n,1} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{n+2}}.$$

Avant de passer au cas où $k \geq 2$, voyons pour quels polynômes, on a égalité dans notre résultat. Tout d'abord, si on a $n = 1$, alors c'est vrai pour tout polynôme, et pour $n \geq 2$, si on suppose que p est un polynôme non constant de degré au plus n , alors on peut écrire p de la forme $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$. On a $|a_0| + \lambda_{n,1}|a_1| = M_p$, donc il existe $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ tel que

$$|a_0 + \lambda_{n,1}a_1\zeta| = M_p = |a_0| + \lambda_{n,1}|a_1|, \quad (4.1)$$

de plus

$$a_0 + \lambda_{n,1}a_1\zeta = p(z) * [1 + \lambda_{n,1}z + o(z^n)]|_{z=\zeta}.$$

Or pour $|z| < 1$, $\Re(1 + \frac{1}{2}z) > \frac{1}{2}$ et puisque $\lambda_{n,1} \geq \frac{1}{2}$, donc

$$\Re(1 + \lambda_{n,1}z + o(z^n)) > \frac{1}{2}.$$

On a $\det((\mathbf{M}_{n+1})_{\lambda_{n,1}}) = 0$ et $\det((\mathbf{M}_{j+1})_{\lambda_{n,1}}) > 0$ pour tout $j \in (1, \dots, n-1)$, alors d'après [10], on peut écrire $1 + \lambda_{n,1}z + o(z^n)$ de la forme

$$1 + \lambda_{n,1}z + o(z^n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{1}{1 - z_j z}$$

avec $\alpha_j > 0$ et $z_j \in \partial\mathbb{D}$ tel que $z_j \neq z_k$ si $j \neq k$, ainsi

$$\begin{aligned} a_0 + \lambda_{n,1}a_1\zeta &= p(z) * [1 + \lambda_{n,1}z + o(z^n)]|_{z=\zeta} \\ &= p(z) * \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{1}{1 - z_j z} \right]|_{z=\zeta} \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j p(z_j \zeta). \end{aligned}$$

C'est clair que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$; donc

$$M_p = |a_0 + \lambda_{n,1}a_1\zeta|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j p(z_j \zeta) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \alpha_j |p(z_j \zeta)| \\
&\leq M_p \sum_{j=1}^n \alpha_j \\
&= M_p,
\end{aligned}$$

alors

$$\left| \sum_{j=1}^n \alpha_j p(z_j \zeta) \right| = \sum_{j=1}^n \alpha_j |p(z_j \zeta)|.$$

Donc pour tout j , on a $p(z_j \zeta) = M_p e^{i\phi}$ pour un certain $\phi \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on suppose que $\zeta = 1$ et $p(z_j) = M_p$ pour tout j . Soit $Q(z) = p(z) - M_p$; c'est un polynôme de degré n , alors il admet n zéros, mais $Q(z)$ s'annule en z_j pour tout $1 \leq j \leq n$, d'où les z_j sont les seuls zéros de Q . Écrivons donc $Q(z)$ de la forme $Q(z) = K \prod_{j=1}^n (z - z_j) = p(z) - M_p$ tel que $K \in \mathbb{C}$, il suit que

$$\begin{aligned}
p(z) &= M_p + K \prod_{j=1}^n (z - z_j) \\
&= M_p + K \prod_{j=1}^n (-z_j) + \cdots + K z^n.
\end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Visser à p , on aura donc

$$|M_p + K \prod_{j=1}^n (-z_j)| + |K| \leq M_p,$$

ce qui implique

$$|M_p + K \prod_{j=1}^n (-z_j)| \leq M_p - |K| = M_p - |K \prod_{j=1}^n (-z_j)|.$$

Une telle inégalité nous amène à dire que $|M_p + K \prod_{j=1}^n (-z_j)| + |K| = M_p$,

donc $p(z)$ s'écrit de la forme $p(z) = \alpha + \beta z^n$, c'est à dire $|a_1| = 0$, alors d'après (4.1), $|a_0| = M_p$, il suit que p est constant ce qui est absurde, donc on aura comme résultat final : on a égalité dans notre expression pour le cas où $k = 1$ si $p \in \mathcal{P}_1$ si $n = 1$ et $p = a_0$ si $n \geq 2$.

Maintenant, on considère le cas où $1 < k \leq \frac{n}{2}$. Soient $p(z) = \sum_{t=0}^n a_t z^t$ et les w_j , ($j = 1, \dots, k$), les racines k -ième de l'unité, donc

$$g(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k p(w_j z) = a_0 + a_k z^k + \dots + a_{\lceil \frac{n}{k} \rceil k} z^{\lceil \frac{n}{k} \rceil k},$$

et

$$Q(z) = g(z^{\frac{1}{k}}) = a_0 + a_k z + \dots + a_{\lceil \frac{n}{k} \rceil k} z^{\lceil \frac{n}{k} \rceil}.$$

Il est clair que $|Q|_{\mathbb{D}} = |g|_{\mathbb{D}} \leq |p|_{\mathbb{D}}$. Appliquons le résultat pour le cas où $k = 1$ au polynôme Q ; on a alors

$$|a_0| + \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lceil \frac{n}{k} \rceil + 2}\right) |a_k| \leq |Q|_{\mathbb{D}} \leq |p|_{\mathbb{D}}.$$

Passons au cas d'égalité. Si

$$|a_0| + \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lceil \frac{n}{k} \rceil + 2}\right) |a_k| = |p|_{\mathbb{D}} = |Q|_{\mathbb{D}},$$

d'après ce qui précède, on a

- ou bien $Q(z) = Q(0) = a_0$, alors $|Q|_{\mathbb{D}} = |a_0| = |p(0)|$ mais comme $|Q|_{\mathbb{D}} = |p|_{\mathbb{D}}$, donc $|p|_{\mathbb{D}} = |p(0)|$ et ceci implique que p est constant,
- ou bien $Q(z) = a_0 + a_k z$, alors

$$|a_0| + |a_k| = |Q|_{\mathbb{D}} = |p|_{\mathbb{D}} = |a_0| + \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lceil \frac{n}{k} \rceil + 2}\right) |a_k|,$$

il suit que

$$|a_k| = \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lceil \frac{n}{k} \rceil + 2}\right) |a_k|,$$

et comme $\lceil \frac{n}{k} \rceil \geq 2$, alors $|a_k| = 0$, d'où $Q(z) = Q(0)$ et ceci donne à la fin $p(z) = p(0)$.

Alors tout ce travail nous amène à dire qu'on a égalité dans notre expression pour $n \geq 2$ si et seulement si p est constant.

Le cas où $\frac{n}{2} < k \leq n$ a été étudié au chapitre 2.

Chapitre 5

Une application : L'inégalité de Chebyshev

Dans ce chapitre, nous discuterons de certaines améliorations de l'inégalité de Chebyshev qu'on peut obtenir en appliquant les variantes de l'inégalité de Visser démontrées dans les chapitres précédents.

Soit $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k(p)z^k$ un polynôme à coefficients complexes ; posons $|p|_{[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |p(x)|$. L'inégalité de Chebyshev dit que

$$|p|_{[-1,1]} \geq \frac{|a_n(p)|}{2^{n-1}},$$

et en posant t_n le n -ième polynôme de Chebyshev (i.e., $t_n(\cos \theta) = \cos n\theta$, pour tout θ), on peut écrire pour p comme plus haut

$$\frac{|p|_{[-1,1]}}{|a_n(p)|} \geq \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{|t|_{[-1,1]}}{|a_n(t_n)|}.$$

Ceci met en évidence la nature extrême de t_n pour cette inégalité. Les résultats de ce chapitre sont tirés d'un papier dû à Dryanov et Fournier [4].

5.1 Théorème : *Soit p un polynôme de degré au plus n à coefficients*

complexes arbitraires. Si on a $0 \leq k < \frac{n}{2}$, alors

$$|p|_{[-1,1]} \geq \frac{|a_n|}{2^n} + \left| \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j} \right|.$$

Cette inégalité est stricte si $k > 0$ et $p \neq 0$.

Ici, on a $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ si $0 \leq j \leq n$. Il s'agit clairement d'une extension de l'inégalité de Chebyshev car pour $k = 0$

$$\frac{|a_n|}{2^n} + \left| \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j} \right| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}.$$

Démonstration du théorème :

Soit $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$. Si $\tilde{p}(z) = z^n p\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) \in \mathcal{P}_{2n}$, alors

$$\tilde{p}(z) = \frac{a_n}{2^n} + \dots + \frac{a_n}{2^n} z^{2n} := \sum_{k=0}^{2n} A_k(\tilde{p}) z^k$$

et

$$A_0(\tilde{p}) = A_{2n}(\tilde{p}) = \frac{a_n}{2^n}.$$

On a $\tilde{p}(e^{i\theta}) = e^{in\theta} p\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) = e^{in\theta} p(\cos \theta)$, donc $|\tilde{p}(e^{i\theta})| = |p(\cos \theta)|$. Il suit que

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}} |\tilde{p}(e^{i\theta})| = |\tilde{p}|_{\mathbb{D}} = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |p(\cos \theta)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|.$$

Si on applique l'inégalité de Visser au polynôme \tilde{p} , on aura

$$|\tilde{p}|_{\mathbb{D}} = |p|_{[-1,1]} \geq |A_0(\tilde{p})| + |A_{2n}(\tilde{p})| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}.$$

Ceci montre bien que l'inégalité de Chebyshev est conséquence de l'inégalité de Visser ; de plus on a égalité si

$$\begin{aligned} \tilde{p}(z) &= A_0(\tilde{p}) + A_{2n}(\tilde{p}) z^{2n} \\ &= \frac{a_n}{2^n} (1 + z^{2n}), \end{aligned}$$

et

$$|p|_{[-1,1]} = \left| \frac{a_n}{2^n} \max_{|z|=1} (1 + z^{2n}) \right| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}.$$

C'est le cas d'égalité pour l'inégalité de Chebyshev et ceci est vrai seulement pour les multiples complexes du n -ième polynôme de Chebyshev. En effet, on a

$$\frac{a_n}{2^n} (1 + z^{2n}) = z^n p \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) = z^n \frac{a_n}{2^{n-1}} \left(\frac{z^{-n} + z^n}{2} \right).$$

Pour $z = e^{i\theta}$, on a

$$\begin{aligned} p(\cos \theta) &= \frac{a_n}{2^{n-1}} \left(\frac{e^{-in\theta} + e^{in\theta}}{2} \right) \\ &= \frac{a_n}{2^{n-1}} \cos n\theta \\ &= K \cos n\theta \\ &= K t_n(\cos \theta), \end{aligned}$$

où $K \in \mathbb{C}$, d'où le résultat.

Maintenant, montrons que pour tout $0 \leq k < \frac{n}{2}$,

$$A_{2k}(\tilde{p}) = A_{2n-2k}(\tilde{p}) = \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j}.$$

Tout d'abord, voyons pourquoi $A_{2k}(\tilde{p}) = A_{2n-2k}(\tilde{p})$; on a $\tilde{p}(z) = z^n p\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)$ de degré au plus $2n$ avec $p \in \mathcal{P}_n$; alors

$$z^{2n} \tilde{p}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{2n} \frac{1}{z^n} p \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) = z^n p \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) = \tilde{p}(z),$$

donc

$$z^{2n} \tilde{p}\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{p}(z).$$

Posons $\tilde{p}(z) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k z^k$, il suit que $z^{2n} \tilde{p}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k z^{2n-k}$. Faisons un

changement d'indice et écrivons $t = 2n - k$, donc

$$\begin{aligned} z^{2n} \tilde{p}\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{t=0}^{2n} \alpha_{2n-t} z^t \\ &= \sum_{t=0}^{2n} \alpha_t z^t = \tilde{p}(z), \end{aligned}$$

alors pour tout k , $\alpha_k = \alpha_{2n-k}$, donc

$$A_{2k}(\tilde{p}) = A_{2n-2k}(\tilde{p}),$$

pour $0 \leq k < \frac{n}{2}$. Maintenant, montrons que

$$A_{2k}(\tilde{p}) = A_{2n-2k}(\tilde{p}) = \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j}$$

si $0 \leq k < \frac{n}{2}$. On a

$$\tilde{p}(z) = z^n p\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) = z^n \left(a_0 + a_1 \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) + \cdots + a_\beta \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)^\beta + \cdots \right)$$

et

$$a_\beta z^n \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)^\beta = z^n \frac{a_\beta}{2^\beta} \sum_{i=0}^{\beta} C_{\beta}^i z^i \left(\frac{1}{z}\right)^{\beta-i} = \frac{a_\beta}{2^\beta} \sum_{i=0}^{\beta} C_{\beta}^i z^{n-2i-\beta}.$$

On veut trouver $A_{2k}(\tilde{p})$, c'est à dire chercher les i qui vérifient $z^{n-2i-\beta} = z^{2k}$. On a $n - \beta = 2(k - i)$, donc il faut que β ait la même parité que n . Posons $\beta = n - 2j$ avec $0 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, alors $n - (n - 2j) = 2(k - i)$, il suit que $i = k - j$ pour $j \leq k$, d'où

$$A_{2k}(\tilde{p}) = A_{2n-2k}(\tilde{p}) = \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j},$$

pour $0 \leq k < \frac{n}{2}$.

Maintenant, si on applique le résultat du théorème (2.1) du chapitre 2

au polynôme \tilde{p} et les coefficients $A_0(\tilde{p})$ et $A_{2n-2k}(\tilde{p})$, on aura l'égalité

$$\begin{aligned} |p|_{[-1,1]} = |\tilde{p}|_{\mathbb{D}} &= |A_0(\tilde{p})| + |A_{2n-2k}(\tilde{p})| \\ &= \frac{|a_n(p)|}{2^n} + \left| \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j} \right|, \end{aligned}$$

si $\tilde{p}(z)$ s'écrit de la forme

$$\tilde{p}(z) = z^n p \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) = |\tilde{p}|_{\mathbb{D}} \zeta_1 (1 - a(1 - \zeta_2^{2n-2k}) z^{2n-2k} Q(z)),$$

tel que $\zeta_1 \in \partial\mathbb{D}$, $\zeta_2 \in \partial\mathbb{D}$ et $Q \in \mathcal{P}_{2k} \subseteq \mathcal{P}_{2n-2k-1}$ et on a

$$Q(z) = 1 + \sum_{j=1}^{n-k-1} A_j(Q) z^j + A_{n-k} z^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-k-1} \overline{A_j(Q)} z^{2n-2k-j},$$

avec $A_{n-k}(Q)$ réel, $\inf \Re[Q(z)] \geq \frac{1}{2}$ et $0 \leq a \leq 2 \inf_{z \in \mathbb{D}} \Re \left[\frac{1}{(1 - z^{2n-2k}) Q(z)} \right]$.

Si $p \neq 0$, on suppose que $|p|_{\mathbb{D}} = \zeta_1 = \zeta_2 = 1$, c'est à dire $z^n p \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) = 1$ si $z^{2n-2k} = 1$. Soient w_j , ($j = 0, \dots, n-k-1$), les racines $(n-k)$ -ième de l'unité, donc pour tout $j \in (0, \dots, n-k-1)$, $w_j = e^{\frac{2ij\pi}{n-k}}$. Il suit que $w_j^{n-k} = (e^{\frac{2ij\pi}{n-k}})^{n-k} = (e^{\frac{ij\pi}{n-k}})^{2n-2k} = 1$. Posons $z_j = e^{\frac{ij\pi}{n-k}}$; ainsi, pour tout j ,

$$z_j^n p \left(\frac{z_j + \frac{1}{z_j}}{2} \right) = 1$$

et

$$p \left(\cos \frac{j\pi}{n-k} \right) = e^{-i \frac{j\pi n}{n-k}}.$$

De même, on a

$$(\overline{z_j})^n p \left(\frac{\overline{z_j} + \frac{1}{\overline{z_j}}}{2} \right) = 1,$$

ce qui implique

$$p \left(\cos \frac{j\pi}{n-k} \right) = e^{i \frac{j\pi n}{n-k}}.$$

Alors, pour tout ($j = 1, \dots, n - k - 1$)

$$e^{i\frac{j\pi n}{n-k}} = e^{-i\frac{j\pi n}{n-k}},$$

d'où $\sin \frac{j\pi n}{n-k} = 0$, c'est à dire $\frac{j\pi n}{n-k} = \alpha\pi$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$. Alors $n - k$ divise jn or $n - k > \frac{n}{2}$, donc $n - k$ divise j mais ceci est absurde, ainsi, on en déduit que si $p \neq 0$, on a une inégalité stricte seulement pour $k > 0$.

5.2 Théorème : *Soit p un polynôme de degré au plus n et à coefficients complexes arbitraires. Si n est pair, alors,*

$$|p|_{[-1,1]} \geq \frac{|a_n|}{2^n} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{\frac{n}{2}-j} \right|.$$

L'inégalité est stricte si $p \neq 0$.

Démonstration du théorème :

Pour montrer ce théorème, on procède de la même manière que dans le théorème (5.1); dans ce cas, on a $p \in \mathcal{P}_n$ et $\tilde{p}(z) = z^n p(\frac{z+\frac{1}{z}}{2})$, donc si on applique le théorème (4.1) sur \tilde{p} , on a pour tout $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$

$$|\tilde{p}|_{\mathbb{D}} = |p|_{[-1,1]} \geq |A_0(\tilde{p})| + \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{\lfloor \frac{2n}{2k} \rfloor + 2}\right) |A_{2k}(\tilde{p})|.$$

Prenons $k = \frac{n}{2}$ puisque n est pair; on a

$$|p|_{[-1,1]} \geq \frac{|a_n|}{2^n} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{\frac{n}{2}-j} \right|. \quad (5.1)$$

Dans ce cas, on a une égalité dans (5.1) si et seulement si \tilde{p} est constant, alors, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $\tilde{p}(z) = c$. Pour $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\tilde{p}(e^{i\theta}) = e^{ni\theta} p(\cos \theta) = c$$

donc

$$p(\cos \theta) = ce^{-ni\theta}.$$

De même , pour $z = e^{-i\theta}$, on a

$$p(\cos(-\theta)) = p(\cos \theta) = ce^{ni\theta},$$

ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$ce^{ni\theta} = ce^{-ni\theta},$$

alors $c = 0$. On a p est nul sur $[-1, 1]$ mais p est holomorphe sur \mathbb{C} et admet un point d'accumulation des zéros sur $[-1, 1]$, ce qui implique que les zéros de p ne sont pas isolés. Alors, d'après le principe des zéros isolés, on a $p \equiv 0$ d'où , on a une inégalité stricte si $p \neq 0$.

5.3 Théorème : Soient $p \in \mathcal{P}_n$ et $0 < k \leq \frac{n}{2}$. Pour tout nombre complexe ϵ tel que $|\epsilon| < \frac{1}{2}$, on a

$$|p|_{[-1,1]} \geq \left| \frac{a_n}{2^n} + \epsilon \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j} \right| + \left| \frac{a_n}{2^n} + \bar{\epsilon} \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j} \right|$$

et on a égalité si et seulement si p est multiple du n -ième polynôme de Chebyshev t_n .

Démonstration du théorème :

Soient $p \in \mathcal{P}_n$ et $\tilde{p}(z) = z^n p(\frac{z+\frac{1}{z}}{2})$. Pour obtenir l'inégalité, on va appliquer un lemme énoncé par Ruscheweyh [9].

5.3.1 Lemme : Soit $Q \in \mathcal{P}_{2n-1}$ avec $Q(0) = 1$ et $\inf_{|z|<1} \Re(Q(z)) > \frac{1}{2}$, alors pour tout polynôme $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{2n}$ et pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$

$$|\tilde{p}| \geq \left| A_0(\tilde{p}) + \sum_{k=1}^{2n-1} A_k(Q) A_k(\tilde{p}) z^k \right| + \left| A_{2n}(\tilde{p}) + \sum_{k=1}^{2n-1} \overline{A_k(Q)} A_{2n-k}(\tilde{p}) z^k \right|,$$

et on a égalité si et seulement si $\tilde{p}(z) = A_0(\tilde{p}) + A_{2n}(\tilde{p}) z^{2n}$.

Alors, si on prend $Q(z) = 1 + \epsilon z^{2k}$ tel que $|\epsilon| < \frac{1}{2}$ et puisque pour tout $0 < k \leq \frac{n}{2}$

$$A_{2k}(\tilde{p}) = A_{2n-2k}(\tilde{p}) = \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j},$$

on aura

$$|p|_{[-1,1]} = |\tilde{p}|_{\mathbb{D}} \geq \left| \frac{a_n}{2^n} + \epsilon \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j} \right| + \left| \frac{a_n}{2^n} + \bar{\epsilon} \sum_{j=0}^k \frac{a_{n-2j}}{2^{n-2j}} C_{n-2j}^{k-j} \right|.$$

Le cas d'égalité est possible si et seulement si $\tilde{p}(z)$ s'écrit de la forme

$$\tilde{p}(z) = z^n p\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) = A_0 + A_{2n} z^{2n},$$

ainsi comme dans le théorème (5.1), p est un multiple du n -ième polynôme de Chebyshev.

Chapitre 6

Conclusion

Nous souhaitons conclure ce mémoire en examinant quelques résultats supplémentaires évidemment reliés à l'inégalité de Visser. Soit p un polynôme de degré n et $q \in \mathcal{P}_{n-1}$ tel que pour tout $|z| < 1$

$$|p(z)| < |q(z)|. \quad (6.1)$$

Remarquons que cette dernière inégalité signifie que le polynôme q aura, s'il y a lieu, tous ses zéros à l'extérieur du disque unité. Sous ces hypothèses, Rahman a montré dans [7] que

$$|a_0(p)| + |a_n(p)| \leq |a_0(q)|. \quad (6.2)$$

Il s'agit clairement d'une extension de l'inégalité de Visser qui correspond au cas où par exemple $q \equiv 1$. Considérons maintenant des polynômes P et Q définis de la manière qui suit : on choisit des nombres complexes z_j sur le cercle unité et on pose $W(z) = \prod_{j=1}^n (1 - z_j z)$; on choisit en outre des nombres réels $l_j \in [0, 1]$ avec $\sum_{j=1}^n l_j = 1$, $t \in [0, 1]$ et un nombre complexe $A_0 \neq 0$. Posons maintenant, avec $|\zeta| = 1$,

$$Q(z) = A_0 W(z) \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{1 - z_j z}$$

et

$$P(z) = \zeta(Q(z) - tA_0W(z)).$$

Il est clair que $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ et P est un polynôme de degré n . On a aussi pour tout $|z| < 1$

$$|P(z)| < |Q(z)|$$

si et seulement si pour $|z| < 1$

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{1 - z_j z} - t \right| < \left| \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{1 - z_j z} \right|,$$

et cette dernière condition est évidemment réalisée car lorsque $|z| < 1$,

$$\Re \left(\sum_{j=1}^n \frac{l_j}{1 - z_j z} \right) = \sum_{j=1}^n l_j \Re \left(\frac{1}{1 - z_j z} \right) > \sum_{j=1}^n \frac{l_j}{2} \geq \frac{1}{2} \geq \frac{t}{2}.$$

Un calcul simple montre en outre que

$$|a_0(Q)| = |A_0|$$

et

$$|a_0(P)| = |\zeta(A_0 - tA_0)| = (1 - t)|A_0|$$

ainsi que

$$|a_n(P)| = | -t\zeta A_0 \prod_{j=1}^n | = t|A_0|.$$

Donc les polynômes ainsi définis vérifient l'hypothèse (6.2) du résultat de Rahman avec

$$|a_0(P)| + |a_n(P)| = |a_0(Q)|.$$

Fournier [6] a en fait montré que ces polynômes P et Q sont les seuls pour lesquels on aura l'égalité dans (6.2). Il est donc vrai que le résultat de Rahman est une extension valable de l'inégalité de Visser, même si cette extension admet de fort nombreux cas d'égalité!

Nous avons étudiés au chapitre 3 des bornes supérieures pour des expres-

sions du type

$$|a_l| + |a_m|$$

où $0 \leq l < m < \infty$ pour des fonctions $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ analytiques dans le disque unité. Il existe des résultats similaires pour les polynômes; ces résultats sont très partiels et c'est pourquoi nous avons décidé de n'en discuter que dans cette conclusion. Ces résultats sont essentiellement dûs à Brickman, Rahman et Ruscheweyh et proviennent des articles [1] et [2] où on retrouvera les références appropriées. On pose pour $0 \leq s < t \leq n$ et $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$,

$$C_n(s, t) = \max_{p \in \mathcal{P}_n} |a_s| + |a_t|$$

et

$$C_n = \max_{0 \leq s < t \leq n} C_n(s, t).$$

Nous avons vu au chapitre 3 que $\sup_n C_n = \frac{4}{\pi}$. Il est connu qu'en posant $s_n = (\frac{4}{\pi} - C_n)n^2$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \frac{\left(1 + 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}{8\pi} = 1.49\dots$$

alors que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \frac{3\pi}{4} = 2.35\dots;$$

on ne sait même pas montrer si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existe! Il existe bien quelques estimés pour $C_n(s, t)$ essentiellement dus à Rahman [7] :

$$C_n(s, t) \leq \frac{2}{m} \cot \frac{\pi}{2m},$$

tels que $0 \leq s < t$, $s + t \leq n$ et $m = 1 + \frac{n-s}{t-s}$, mais en général, ces estimés ne sont pas optimaux. Il vaut cependant la peine de mentionner

$$C_n(0, 1) = \max_{p \in \mathcal{P}_n} |a_0| + |a_1| \leq \frac{2}{n+1} \cot \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right)$$

qui est trivialement optimal lorsque $n = 1$ (il s'agit alors de l'inégalité de

Visser) mais aussi lorsque $n = 2$ ou $n = 3$! Remarquons cependant que l'inégalité ne saurait être optimale pour une infinité d'indices n_k : on aurait alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_{n_k}(0, 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{n_k + 1} \cot \frac{\pi}{2(n_k + 1)} = \frac{4}{\pi} = 1.27\dots$$

et on sait d'après un résultat du chapitre 3 que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} C_n(0, 1) \leq \frac{5}{4} = 1.25\dots$$

Nous remarquons finalement que la méthode appliquée pour démontrer l'extension de Dryanov et Fournier [5, pp. 331-340] de l'inégalité de Van-der-Corput-Visser, c'est à dire,

$$|a_0| + \frac{1}{2} \sec \left(\frac{\pi}{\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 2} \right) |a_k| \leq |p|_{\mathbb{D}},$$

faisait appel à la détermination de certaines fonctions admettant une représentation $\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{1-\zeta z} d\nu(\zeta)$ où ν était une mesure de probabilité sur $\partial\mathbb{D}$. Tel que remarqué par Brickman et Ruscheweyh [1], la détermination de la quantité $C_n(0, 1)$ impliquera des représentations de la forme

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{M} z + o(z^n) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{1-\zeta z} d\nu(\zeta)$$

avec des mesures complexes ν sur $\partial\mathbb{D}$ (et non plus seulement des mesures de probabilité). Comme on peut le voir en lisant leur papier (par ailleurs assez méconnu) cela complique la situation assez singulièrement ; ils ont cependant pu obtenir le résultat suivant

$$C_n(0, 1) = \inf \sum |res \frac{1}{p}| \tag{6.3}$$

où l'infimum est pris sur la classe de tous les polynômes $p \in \mathcal{P}_n$ ayant n zéros différents sur $\partial\mathbb{D}$ et tels que $p(0) = |p'(0)| = 1$ et la somme est prise sur tous les résidus de $\frac{1}{p}$. On voit mal, comment utiliser ce résultat pour obtenir une représentation plus explicite de $C_n(0, 1)$; il est cependant remarquable que le

choix de $p(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ et quelques calculs montrent que le membre de droite dans (6.3) est borné supérieurement par $\frac{2}{n+1} \cot \frac{\pi}{2(n+1)}$; c'est à dire que ce résultat de et Brickman et Ruscheweyh contient celui de Rahman que nous avons rencontré plus haut !

Bibliographie

- [1] Brickman, L. et Ruscheweyh, St. , *Bound preserving multipliers for $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ and an application to polynomials*, Notas. Soc. Mat. Chile. 3(1984), pp, 29-47.
- [2] Brickman, L. , Rahman, Q. I. et Ruscheweyh, St. , *On pairs of coefficients of bounded polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 92(1984), pp. 533-537.
- [3] Collingwood, E. F. et Lohwater, A. J. , *The Theory of cluster sets*, The Cambridge University Press, (1966).
- [4] Dryanov, D. et Fournier, R. , *Refinement of an inequality of P. L. Chebyshev*, Acta Mathematica. Hungar., 122(2009), pp. 59-69.
- [5] Dryanov, D. et Fournier, R. , *Bound preserving operators over classes of polynomials*, East Journal on Approximations, 8(2002).
- [6] Fournier, R. , *On a polynomial inequality*, J. Math. Anal. Appl. 351(2009), pp. 163-169.
- [7] Rahman, Q. I. , *Inequalities concerning polynomials and trigonometric polynomials*, J. Math. Anal. Appl. 6 (1963), pp. 303-324.
- [8] Rahman, Q. I. et Schmeisser, G. , *Analytic Theory of Polynomials*, London Mathematical Society Monographs, (2002), Oxford University Press.
- [9] Ruscheweyh, St. , *Convolution in Geometric Function Theory*, Les Presses de l'Université de Montréal, (1982).

- [10] Tsuji, M. , *Potential Theory in Modern Function Theory*, Chelsea, New York, (1975), pp. 153-159.
- [11] Van Der Corput, J. G. et Visser, C. , *Inequalities concerning polynomials and trigonometric polynomials*, Indagationes Math. 8(1946), pp. 238-247.
- [12] Visser, C. , *A simple proof of certain inequalities concerning polynomials*, Indagationes Math. 7(1945), pp. 81-86.