République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure
et de la Recherche Scientifique

Université **Hadj Lakhdar** *de Batna*

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Laboratoire des Techniques Mathématiques

Mémoire de **Magister** *en Mathématiques*

Option : **Mathématiques Appliquées**

Présentée par : **ABDESSELAM NAWEL**

THEME

Stabilisation de l'équation de Schrödinger par un feedback frontière de type mémoire

Soutenue le : 04/12/2006, devant le jury

Président :	Mr.R. Benacer	Prof Université de Batna
Rapporteur :	Mr. S.E Rebiai	Prof Université de Batna
Examinateurs :	Mr. A. Youkana	M.C Université de Batna
	Mr. N.E Bensalem	M.C Université de Sétif

Contents

1 INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné de $\Re^n$ de frontière régulière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où Γ_0 et $\Gamma_1$sont deux parties de Γ vérifiant

$$\Gamma_0, \Gamma_1 \neq \phi \tag{1.1}$$

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \phi \tag{1.2}$$

Soit

$$Ay = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right).$$

un opérateur différentiel d'ordre deux à coefficients réels (a_{ij}) de classe C^∞ satisfaisant les conditions suivantes

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \qquad \text{(symétrie)} \tag{1.3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\overline{\xi_j} \geq \alpha_1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i^2. \;\; \forall x \in \Omega, \forall \zeta = (\zeta_{1,\dots,}\zeta_n) \in \mathbb{C}^n \tag{1.4}$$

pour une constante positive α_1

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j > 0, \;\; \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \Re^n. \tag{1.5}$$

Dans Ω, on considère le problème mixte pour l'équation de **Schrödinger** suivant

$$\begin{aligned}
y_t - \mathbf{i}Ay &= 0 && \text{dans }]0,+\infty[\times\Omega && (1.6a)\\
y(0,x) &= y_0(x) && \text{dans } \Omega && (1.6b)\\
y &= 0 && \text{sur }]0,+\infty[\times\Gamma_0 && (1.6c)\\
\frac{\partial y}{\partial \nu_A} &= u && \text{sur }]0,+\infty[\times\Gamma_1 && (1.6d)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \nu_A} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_i}.\nu_i.\\
\nu &= (\nu_1,\dots,\nu_n) \text{ est le vecteur normal, et } u \text{ la fonction de contrôle.}
\end{aligned}$$

Notre objectif dans ce travail est de déterminer u sous forme d'un feedback de type mémoire, telle que la solution du problème$(1.6a)-(1.6d)$ décroit exponentiellement.

Le problème de la stabilisation des équations aux dérivées partielles, par un feedback frontière de type mémoire a été considéré récemment par plusieurs auteurs.

Le comportement asymptotique des solutions de l'équation des ondes à coefficients constants avec un feedback frontière de type mémoire agissant sur la condition de **Neumann** à été étudie par **Guesmia** [4] dans le cas où le feedback est linéaire et par **Aassila, Cavalcanti, et Sorianon [1]** dans le cas non linéaire en utilisant la technique des multiplicateurs. Cette étude a été généralisée par **Shugen.Chai et Yuxia.Guo** [3] aux équations des ondes à coefficients variables en adaptant une approche développée par **Yao** [12] et qui combine la géométrie riemannienne et la technique des multiplicateurs.

Le problème de la stabilisation uniforme de l'équation de **Schrödinger** canonique par un contrôle frontière a été considérée par **Machtyngier et Zuazua** [9] dans le cas où le contrôle est de type **Neumann,** et par **Lasiecka et Triggani** [7] dans le cas où le contrôle est de type **Dirichlet.** Ces résultats ont été généralisés par **Rebiai** [10], [11] au cas où l'opérateur élliptique est à coefficients variables.

Dans ce mémoire, on adopte l'approche basée sur la géométrie riemannienne et la technique des multiplicateurs pour établir la stabilisation uniforme de l'équation de **Schrödinger** à coefficients variables par un feedback frontière de type mémoire.

On procède comme suit:

Premièrement, on rappelle quelques notions de la géométrie riemannienne qui seront utilisées à travers ce mémoire. Ensuite, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité des solutions de l'équation de **Schrödinger** avec un feedback frontiére de type mémoire en utilisant la méthode de **Galerkin.** Enfin, on établit la décroissance exponentielle des solutions du système considéré.

2 Rappels sur la géométrie riemannienne

Dans ce paragraphe on va introduire quelques notions de la geométrie riemannienne dont on aura besoin ultérieurement et on renvoie le lecteur à l'ouvrage [5] pour plus de détails.

2.1 Métrique riemannienne engendrée par les coefficients $a_{ij}(x)$

Posons

$$A(x) = a_{ij}(x), G(x) = [A(x)]^{-1}$$

Pour chaque $x \in \Re^n$, on définit le produit scalaire $g(.,.)$ et la norme correspondante $|.|_g$ sur l'espace tangent $T_x\Re^n$ par:

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= \langle X,Y\rangle_g \\ &= X.G(x)Y \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,\alpha_i\beta_j \end{aligned}$$

Alors on peut montrer que $(\Re^n, g)$ est une variété riemannienne.

Remarque 2.1.1.

Si $G(x) = I_n$ (la matrice identitie) alors g est la métrique euclidéenne.

Notons par $\nabla_0 f$ le gradient de la fonction f dans la métrique euclidéenne, et $div_0 V$ la divergence de V dans la métrique euclidéenne.

2.2 Connexion, dérivée covariante et différentielle covariante

Soit $\Gamma(T_x\Re^n)$ l'espace des champs de vecteurs différentiables sur $\Re^n$.

Définition 2.2.1.

Une connexion sur $\Re^n$ est une application $\Re$-bilinéaire de $\Gamma(T\Re^n) \times \Gamma(T\Re^n)$ dans $\Gamma(T\Re^n)$ qui satisfait les conditions suivantes

Pour tout $X, Y \in \Gamma(T\Re^n)$ et $f \in C^\infty(\Re^n)$, on a:

$$D_{fX}Y = fD_XY \text{ et } D_X(fY) = (X.f)Y + fD_XY$$

On note généralement D_XY au lieu de $D(X,Y)$.

D_XY est la dérivée covariante de Y par rapport à X.

Définition 2.2.2.

La connexion

$$g : \Gamma(T\Re^n) \times \Gamma(T\Re^n) \to \Gamma(T\Re^n)$$

définie par:

$$\begin{aligned} g(D_XY,Z) &= \frac{1}{2}(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) \\ &\quad -g([X,Z],Y)) \end{aligned}$$

où X, Y et Z sont des champs de vecteurs sur $\Re^n$ et $[X, Y]$ est le crochet de **Lie** est appelé connexion de **Levi-Cevita.**

Définition 2.2.3.

Notons par D la connexion de **Levi-Cevita** dans la métrique riemannienne g.

Soit H un champ de vecteur sur $\Re^n$.

La différentielle covariante DH de H détermine pour chaque $x \in \Re^n$ une forme bilinéaire sur $T_x\Re^n \times T_x\Re^n$, définie par

$$DH(X, Y) = \langle D_X Y, Y\rangle_g. \qquad \forall X, Y \in T_x\Re^n$$

Le lemme suivant nous donne des relations qu'on utilisera dans le paragraphe 4.

Lemme 2.2.4.

Soient $f, h \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *et soient* H, X *deux champs de vecteurs sur* $\Re^n$. A*lors*

i-$\langle X(x), A(x)H(x)\rangle_g = H(x)\,X(x)\,. \qquad \forall x \in \Re^n$

ii- Le gradient $\nabla_g f$ *de* f *dans la métrique riemannienne* g *est donné comme suit*

$$\nabla_g f(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = A(x)\,\nabla_0 f.$$

iii- $\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = (A(x)\,\nabla_0 y)\,.\nu = \nabla_g y.\nu.$

vi- $\langle \nabla_g f, \nabla_g H\rangle_g = \nabla_g f(h) = \nabla_0 f.A(x)\,\nabla_0 h.$

v-$\langle \nabla_g f, \nabla_g H(f)\rangle = DH(\nabla_g f, \nabla_g f) + \frac{1}{2} div_0\left(|\nabla_g f|_g^2\, H\right)(x) - \frac{1}{2}|\nabla_g f|_g^2\, div_0 H.$ $x \in \Re^n$.

vi-$Ay = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = -div_0\left(A(x)\,\nabla_0 y\right) = -div_0\left(\nabla_g y\right),$ $y \in C^2(\Omega)\,.$

Démonstration

i- Soient

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ ,\ X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

deux champs de vecteur sur $\Re^n$.

On a par définition de g

$$\begin{aligned}
\langle X(x), A(x)H(x)\rangle_g &= H\left(x\right)G\left(x\right)A\left(x\right)X\left(x\right) \\
&= H\left(x\right)G\left(x\right)X\left(x\right)A\left(x\right) \\
&= H\left(x\right)X\left(x\right). \qquad \forall x \in \Re^n.
\end{aligned}$$

ii- On a

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \ \nabla_g f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = A\left(x\right).\nabla_0 f.$$

Et

$$\begin{aligned}
X\left(f\right) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X.\nabla_0 f \\
&= \langle X, \nabla_0 f\rangle_0 = \langle X, G\left(x\right)A\left(x\right)\nabla_0 f\rangle \\
&= \langle X, G\left(x\right)\nabla_g f\rangle_0 = \langle X, \nabla_g f\rangle_g
\end{aligned}$$

iii- On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \nu_A} &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right) \frac{\partial y}{\partial x_j}.\nu_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(A\left(x\right).\nabla_0 y\right)_i.\nu_i. \\
&= A\left(x\right)\nabla_0 y.\nu \\
&= \nabla_g y.\nu.
\end{aligned}$$

vi- De(i) et (ii) on a

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_g f, \nabla_g h\rangle_g &= \langle \nabla_g f, G\left(x\right)\nabla_g h\rangle_0 \\
&= \langle A\left(x\right).\nabla_0 f, G\left(x\right).A\left(x\right)\nabla_0 h\rangle_0 \\
&= \nabla_0 f.A\left(x\right)\nabla_0 h.
\end{aligned}$$

v- D'après la définition de la connexion de **Levi-Cevita** on a

$$
\begin{aligned}
DH\langle\nabla_g f,\nabla_g\left(H\left(f\right)\right)\rangle_g &= \langle D_{\nabla_g f}H,\nabla_g f\rangle_g\\
&= \frac{1}{2}\{\nabla_g f g(H,\nabla_g f)+Hg(\nabla_g f,\nabla_g f)-\nabla_g f g(\nabla_g f,H)\\
&\quad +g\left(\left[\nabla_g f,H\right],\nabla_g f\right)-g\left(\left[H,\nabla_g f\right],\nabla_g f\right)\\
&\quad -g\left(\left[\nabla_g f,\nabla_g f\right],H\right)\}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
DH\langle\nabla_g f,\nabla_g\left(H\left(f\right)\right)\rangle_g=\frac{1}{2}\{Hg(\nabla_g f,\nabla_g f)+g\left(\left[\nabla_g f,H\right],\nabla_g f\right)
$$

Mais

$$
\begin{aligned}
Hg(\nabla_g f,\nabla_g f) &= L_H\left(\left|\nabla_g f\right|_g^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^n H_i\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\nabla_g f\right|_g^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\nabla_g f\right|_g^2 H_i\right)-\sum_{i=1}^n\left|\nabla_g f\right|_g^2\frac{\partial}{\partial x_i}H_i\\
&= div_0\left(\left|\nabla_g f\right|_g^2 H\right)-\left|\nabla_g f\right|_g^2 div_0 H
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
g\left(\left[\nabla_g f,H\right],\nabla_g f\right) &= \left[\nabla_g f,H\right]\left(G\left(x\right)A\left(x\right)\nabla_0 f\right)\\
&= L_{\nabla_g f}L_H f-L_H L_{\nabla_g f}f\\
&= \sum_{i=1}^n(\nabla_g f)_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(L_H f\right)-\sum_{i=1}^n H_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla_g f.\nabla f\right)\\
&= \sum_{i=1}^n(\nabla_g f)_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(H_i\nabla_f\right)-\sum_{i=1}^n H_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\nabla_g f\right|_g^2\right)\\
&= \nabla_g f.G\left(x\right)A\left(x\right)\nabla\left(H\left(f\right)\right)-\sum_{i=1}^n H_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\nabla_g f\right|_g^2\right)\\
&= \langle\nabla_g f,\nabla_g\left(H\left(f\right)\right)\rangle_g-div_0(\left|\nabla_g f\right|_g^2 .H).
\end{aligned}
$$

Alors

$$\langle\nabla_g f,\nabla_g H\left(f\right)\rangle_g = DH\langle\nabla_g f,\nabla_g f\rangle + \frac{1}{2}div_0\left(\left|\nabla_g f\right|_g^2 H\right)(x) - \frac{1}{2}\left|\nabla_g f\right|_g^2 div_0 H$$

vi- On a

$$\begin{aligned} Ay &= -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y}{\partial x_j}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y}{\partial x_j}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A\left(x\right)\nabla_0 h\right)_i \\ &= -div_o\left(\nabla_g y\right). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

3 Existence, unicité et régularité des solutions

Ce paragraphe comporte une étude basée sur la méthode de **Faedo-Galerkin** [8] de l'existence, de l'unicité et de la régularité de la solution du problème (1.6a) - (1.6d), avec u donnée par

$$u = -\int_0^t k\,(t-s)\,y_s\,(s)\,ds - by_t$$

où

$$k : \Gamma_1 \times \Re^+ \to \Re^+ \tag{3.1}$$

et

$$b : \Gamma_1 \to \Re^+ \tag{3.2}$$

sont deux fonctions appartenant à $C^3(R^+, L^\infty(\Omega))$, et $L^\infty(\Gamma_1)$ respectivement vérifiant les conditions suivantes:

$$k^{'} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \Re^+ \tag{3.3}$$

$$k^{'}(0) = -k(0) \tag{3.3a}$$

et

$$\exists \delta > 0,\ k^{''} \geq -\delta k^{'} \text{ sur } \Gamma_1 \times \Re^+ \tag{3.4}$$

$$k^{'''} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \Re^+ \tag{3.4a}$$

$$f = \inf_{(x,t)\in\Gamma_1\times\Re^+} (-k') \neq 0 \tag{3.5}$$

$$b \geq \beta \text{ sur } \Gamma_1.\ (\beta \text{ constante positive}) \tag{3.6}$$

Ce choix de u nous a été inspiré par les travaux **Shugen.Chai et Yuxia.Guo** [3] et **Guesmia** [4] sur l'équation des ondes.

On va transformer la condition au bord sur la partie Γ_1. On suppose que $y_0 = 0$ sur Γ_1.

On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^t k(t-s)\, y_t(s)\, ds &= [k(t-s)\, y(s)]_0^t + \int_0^t k'(t-s)\, y(s)\, ds \\
&= \int_0^t k'(t-s)\, y(s)\, ds + k(0)\, y(t) - k(t)\, y_0 \\
&= \int_0^t k'(t-s)\, y(s)\, ds + k(0)\, y(t).
\end{aligned}$$

Donc sur Γ_1, on a

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = -\int_0^t k'(t-s)\, y(s)\, ds - k(0)\, y(t) - b y_t$$

et le système (1.6a) - (1.6d) aura la forme suivante

$$y_t - \mathbf{i} A y = 0 \qquad \text{dans }]0,+\infty) \times \Omega \tag{3.7a}$$
$$y(0,x) = y_0(x) \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.7b}$$
$$y = 0 \qquad \text{sur }]0,+\infty) \times \Gamma_0 \tag{3.7c}$$
$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = -\int_0^t k'(t-s)\, y(s)\, ds - k(0)\, y(t) - b y_t \quad \text{sur }]0,+\infty) \times \Gamma_1 \tag{3.7d}$$

.

Ci-dessous, on va établir un résultat concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème (3.7a) - (3.7d).

Théorème 3.1.

1- *Pour tout*

$$y_0 \in V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega)\,;\, y = 0 \qquad sur \qquad \Gamma_0\}$$

il existe une solution (faible) unique du système (3.7a) - (3.7d) vérifiant:

$$y \in C\left(\Re^+, V\right).$$

2-Si

$$y_0 \in H^3(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ \ tel\ que\ \frac{\partial y_0}{\partial \nu_A} = -k(0)\, y(0) - b y_t(0)\ \ sur\ \Gamma_1$$

alors la solution y (dite forte) est plus régulière

$$y \in C^1\left(\Re^+, V\right).$$

Démonstration

La formulation variationnelle du problème (3.7a) - (3.7d) est donnée par

$$\begin{aligned}
\int_\Omega y_t \overline{v} d\Omega &= \mathbf{i}\int_\Omega Ay\overline{v}d\Omega \\
&= \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\overline{v}d\Omega. \\
&= \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_1} a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\nu_i\overline{v}d\Gamma_1 - \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{v}}{\partial xj}d\Omega \\
&= \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\overline{v}d\Gamma_1 - \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{v}}{\partial xj}d\Omega
\end{aligned}$$

où $v \in V$
De la condition au limite (3.7d), on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega y_t\overline{v}d\Omega = \mathbf{i}\int_{\Gamma_1}(-\int_0^t k'(t-s)\,y(s)\,ds - k(0)\,y(t) - by_t)\overline{v}\,d\Gamma_1 \\
-\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{v}}{\partial xj}d\Omega. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Introduisons les notations suivantes

$$\begin{aligned}
&< \; .,. > \text{ le produit scalaire dans } L^2(\Omega) \\
a(y,v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{v}}{\partial xj}d\Omega. \\
\beta(t,y,v) &= \int_{\Gamma_1}(-\int_0^t k'(t-s)\,y(s)\,ds - k(0)\,y(t))\overline{v}\,d\Gamma_1 \qquad \beta(0,y,v) = 0.
\end{aligned}$$

Alors, on réécrit (3.8) comme suit

$$\langle y_t, v\rangle + \mathbf{i}a\left(y, v\right) + \mathbf{i}\beta\left(t, y, v\right) = -\mathbf{i}\langle by_t, v\rangle \tag{3.9}$$

Maintenant, on passe à l'unicité.
1-L'unicité.

Soient y et z deux solutions de problème (3.7a) - (3.7d).
Alors $w = y - z$ vérifie

$$w_t - \mathbf{i}Aw = 0 \qquad \text{dans }]0, +\infty) \times \Omega \tag{3.10a}$$
$$w\left(0, x\right) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.10b}$$
$$w = 0 \qquad \text{sur }]0, +\infty) \times \Gamma_0 \tag{3.10c}$$
$$\frac{\partial w}{\partial \nu_A} = -\int_0^t k'\left(t-s\right) w\left(s\right) ds - k\left(0\right) w\left(t\right) - bw_t, \text{ sur }]0, +\infty[\times\Gamma_1 \tag{3.10d}$$

Multipliant (3.10a) par $\overline{w}_t$, integrant sur Ω. En appliquant la formule de **Green**, on obtient

$$\int_\Omega \left|w_t\right|^2 d\Omega - \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_1} a_{ij}\left(x\right) \frac{\partial w}{\partial x_i}\nu_i \overline{w_t} d\Gamma + \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}\left(x\right) \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{w_t}}{\partial xj} d\Omega = 0$$

Prenant la partie imaginaire de la relation précédente

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\overline{w_t} d\Gamma_1 &= \operatorname{Re}\int_\Omega \nabla_g w \nabla_g \overline{w}_t d\Omega \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{d}{dt}\left|\nabla_g w\right|_g^2\right] d\Omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left|\nabla_g w\left(t\right)\right|_g^2 d\Omega \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, on a

$$\int_\Omega \left|\nabla_g w\right|_g^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} k\left|w\right|^2 d\Gamma_1 - \int_0^t \int_{\Gamma_1} k'\left(t-s\right)\left|w\left(t\right) - w\left(s\right)\right|^2 d\Gamma_1 ds = 0$$

Alors

$$\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}w\right|_{g}^{2}d\Omega=-\int_{\Gamma_{1}}k\left|w\right|^{2}d\Gamma_{1}+\int_{0}^{t}\int_{\Gamma_{1}}k'\left(t-s\right)\left|w\left(t\right)-w\left(s\right)\right|^{2}d\Gamma_{1}ds.$$

D'aprés (3.1) et (3.3), on déduit

$$\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}w\right|_{g}^{2}d\Omega\leq 0$$

et donc

$$\nabla_{g}w=0$$

Ceci avec la condition au limite (3.10c)

$$w=0\ \blacksquare$$

On passe à la démonstration de l'existence des solutions.

2-L'existence

Soit $(e_n)_{n\in\aleph}$ un ensemble des fonctions dans V qui forment une base orthonormée pour $L^2(\Omega)$.

Soit V_m l'espace engendré par $(e_1,...,e_m)$, et soit

$$y^m(t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{im}(t)e_{i.}$$

une solution du problème de **Cauchy.**

$$\langle y_t^m,v\rangle+\mathbf{i}a\left(y^m,v\right)+\mathbf{i}\beta\left(t,y^m,v\right)=-\mathbf{i}\langle by_t^m,v\rangle \tag{3.11}$$

Posant dans (3.11) $v=y_t^m$, on trouve

$$\langle y_t^m,y_t^m\rangle+\mathbf{i}a\left(y^m,y_t^m\right)+\mathbf{i}\beta\left(t,y^m,y_t^m\right)=-\mathbf{i}\langle by_t^m,y_t^m\rangle$$

En prenant la partie imaginaire, il résulte

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y_{t}^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right)=-\int_{\Gamma_{1}}b\left|y_{t}^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}\\
&-\operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k'\left(t-s\right)y^{m}(s)\overline{y_{t}^{m}}\left(t\right)dsd\Gamma_{1}\right)\\
&-\operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k\left(0\right)y^{m}(t)\overline{y_{t}^{m}}\left(t\right)dsd\Gamma_{1}\right)
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
&-\int b\left|y_{t}^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}-\operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k'\left(t-s\right)y^{m}(s)\overline{y_{t}^{m}}\left(t\right)dsd\Gamma_{1}\right)\\
&-\operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k\left(0\right)y^{m}(t)\overline{y_{t}^{m}}\left(t\right)d\Gamma_{1}\right)=-\int_{\Gamma_{1}}b\left|y_{t}^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}\\
&+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{1}}k'\left|y^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k''\left(t-s\right)\left|y^{m}\left(t\right)-y^{m}\left(s\right)\right|^{2}\,dsd\Gamma_{1}\\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_{1}}k\left|y^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}\right]+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k'\left(t-s\right)\left|y^{m}\left(t\right)-y^{m}\left(s\right)\right|^{2}\,dsd\Gamma_{1}\right]
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y_{t}^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right) &= -\int b\left|y_{t}^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{1}}k'\left|y^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}-\\
&-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k''\left(t-s\right)\left|y^{m}\left(t\right)-y^{m}\left(s\right)\right|^{2}\,dsd\Gamma_{1}\\
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_{1}}k\left|y^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}\right]\\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k'\left(t-s\right)\left|y^{m}\left(t\right)-y^{m}\left(s\right)\right|^{2}\,dsd\Gamma_{1}\right]
\end{aligned}$$

D'aprés (3.2),(3.3) et (3.4)

$$-\int_{\Gamma_{1}}b\left|y_{t}^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{1}}k'\left|y^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k''\left(t-s\right)\left|y^{m}\left(t\right)-y^{m}\left(s\right)\right|^{2}\,dsd\Gamma_{1}<0$$

Donc

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y_{t}^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right)\leq-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_{1}}k\left|y^{m}\right|^{2}d\Gamma_{1}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_{1}}\int_{0}^{t}k'\left(t-s\right)\left|y^{m}\left(t\right)-y^{m}\left(s\right)\right|^{2}dsd\Gamma_{1}\right]$$

De (3.1) et (3.3) on déduit que

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y_{t}^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right)\leq0$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y_{t}^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right)&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}y^{m}\right|_{g}^{2}d\Omega\right)\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}y^{m}\left(T\right)\right|_{g}^{2}d\Omega\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}y^{m}\left(0\right)\right|_{g}^{2}d\Omega$$

D'où

$$\left|y^{m}\right|_{V}^{2}\leq\left|y^{0m}\right|_{V}^{2}$$

On déduit que $(y^m)_{m\in N}$ est bornée dans $L^2(0,T,V)$ donc on peut extraire une suite notée $(y^m)_{m\in N}$ qui converge vers y.

Soit $v\in V$, alors il existe une suite $(v^m)_{m\in N}$ telle que $v^m\in V^m$.

$$v^m\to v \text{ dans } V$$

$(v^m)_{m\in N}$ vérifie (3.11), où

$$\left\langle y_{t}^{m},v^{m}\right\rangle+\mathbf{i}a\left(y^{m},v^{m}\right)+\mathbf{i}\beta\left(t,y^{m},v^{m}\right)=-\mathbf{i}\int_{\Gamma_{1}}by_{t}^{m}\overline{v^{m}}d\Gamma_{1}.\tag{3.12}$$

Soit $\zeta \in D\left(]0,T[\right)$, on pose

$$\psi^m = \zeta v^m \qquad \text{et} \qquad \psi = \zeta v$$

Alors on a

$$\psi^m \to \psi \text{ dans } L^2\left(0,T,V\right)$$

Multiplions(3.12) par ζ et intégrons sur $]0,T[$, on trouve

$$\int_0^T \langle y_t^m, \psi^m\rangle dt + \mathbf{i}\int_0^T a\left(y^m,\psi^m\right)dt + \mathbf{i}\int_0^T \beta\left(t,y^m,\psi^m\right)dt = -\mathbf{i}\int_0^T\int_{\Gamma_1} by_t^m\overline{\psi^m}d\Gamma_1 dt$$

Aprés intégration par parties on obtient

$$\int_0^T \langle y^m, \psi_t^m\rangle dt + \mathbf{i}\int_0^T a\left(y^m,\psi^m\right)dt + \mathbf{i}\int_0^T \beta\left(t,y^m,\psi^m\right)dt = -\mathbf{i}\int_0^T\int_{\Gamma_1} by^m\overline{\psi_t^m}d\Gamma_1 dt$$

En passant à la limite, on trouve:

$$\begin{cases} \int_0^T \langle y,\psi_t\rangle dt + \mathbf{i}\int_0^T a\left(y,\psi\right)dt + \mathbf{i}\int_0^T \beta\left(t,y,\psi\right)dt = -\mathbf{i}\int_0^T\int_{\Gamma_1} by\overline{\psi_t}d\Gamma_1 dt \\ \forall v\in V, \forall \zeta \in D(]0,T[). \end{cases}$$

$$y \in C(]0,T[\,,V) \blacksquare$$

3-La régularité

On dérive (3.12) par rapport à t, on a

$$\langle y_{tt}^m, v\rangle + \mathbf{i}\int_{\Gamma_1}(-\int_0^t k''\left(t-s\right)y^m\left(s\right)ds - k\left(0\right)y_t^m(t))\overline{v}\,d\Gamma_1$$

$$+\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y_t^m}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{v}}{\partial xj}d\Omega \; - \mathbf{i}\int_{\Gamma_1} by_{tt}^m v d\Gamma_1 = 0$$

On pose $v = y_{tt}^m$

$$\langle y_{tt}^m, y_{tt}^m\rangle + \mathbf{i}\int_{\Gamma_1}(-\int_0^t k''\left(t-s\right)y^m\left(s\right)ds - k\left(0\right)y_t^m(t))\overline{y_{tt}^m}\,d\Gamma_1$$

$$+\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y_t^m}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{y_{tt}^m}}{\partial xj}d\Omega \; - \mathbf{i}\int_{\Gamma_1} by_{tt}^m\overline{y_{tt}^m}d\Gamma_1 = 0$$

On prend la partie imaginaire

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y_{t}^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y_{tt}^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right)=-\int_{\Gamma_1}b\left|y_{tt}^{m}\right|^{2}d\Gamma_1$$
$$-\operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)y_t^m(s)\overline{y_{tt}^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)$$
$$-\operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k\left(0\right)y_t^m(t)\overline{y_{tt}^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)$$

D'après (3.3a) on a

$$-\int_{\Gamma_1}b\left|y_{tt}^{m}\right|^{2}d\Gamma_1-\operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''\left(t-s\right)y^m(s)\overline{y_{tt}^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)$$
$$-\operatorname{Re}\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k\left(0\right)y_t^m(t)\overline{y_{tt}^m}\left(t\right)d\Gamma_1\right)=-\int b\left|y_{tt}^{m}\right|^{2}d\Gamma_1$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k''\left|y_t^m\right|^2d\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'''\left(t-s\right)\left|y_t^m\left(t\right)+y^m\left(s\right)\right|^2dsd\Gamma_1$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[-\int_{\Gamma_1}k'\left|y_t^m\right|^2d\Gamma_1-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''\left(t-s\right)\left|y_t^m\left(t\right)+y^m\left(s\right)\right|^2dsd\Gamma_1\right]$$

et de (3.2), (3.4) et (3.4a) on déduit que

$$-\int_{\Gamma_1}b\left|y_{tt}^{m}\right|^{2}d\Gamma_1-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k''\left|y_t^m\right|^2d\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'''\left(t-s\right)\left|y_t^m\left(t\right)+y^m\left(s\right)\right|^2dsd\Gamma_1\leq 0$$

Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y_{t}^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y_{tt}^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right) &\leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(-\int_{\Gamma_1}k'\left|y_t^m\right|^2d\Gamma_1\\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''\left(t-s\right)\left|y_t^m\left(t\right)+y^m\left(s\right)\right|^2dsd\Gamma_1)\end{aligned}$$

D'autre part

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y_{t}^{m}}{\partial x_{i}}\frac{\partial\overline{y_{tt}^{m}}}{\partial xj}d\Omega\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_g y_t^m\right|_g^2d\Omega\right)$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}y_{t}^{m}\right|_{g}^{2}d\Omega\right) &\leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(-\int_{\Gamma_1}k'\left|y_{t}^{m}\right|^{2}d\Gamma_1 \\ &+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_{0}^{t}k''\left(t-s\right)\left|y_{t}^{m}\left(t\right)+y^{m}\left(s\right)\right|^{2}dsd\Gamma_1)\end{aligned}$$

D'après (3.3) et (3.4)

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[-\int_{\Gamma_1}k'\left|y_{t}^{m}\right|^{2}d\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_{0}^{t}k''\left(t-s\right)\left|y_{t}^{m}\left(t\right)+y^{m}\left(s\right)\right|^{2}dsd\Gamma_1\right]\leq 0$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}y_{t}^{m}\right|_{g}^{2}d\Omega\right)\leq 0$$

D'où

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}y_{t}^{m}\left(T\right)\right|_{g}^{2}d\Omega\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla_{g}y_{t}^{m}\left(0\right)\right|_{g}^{2}d\Omega$$

$$\left|y_{0}^{m}\right|_{V}^{2}\leq\left|y_{0}^{0m}\right|_{V}^{2}$$

On déduit que $(y_t^m)_{m\in N}$ est bornée dans $L^2\left(0,T,V\right)$ donc on peut extraire une suite notée $(y_t^m)_{m\in N}$ qui converge vers y_t.

Soit $v_t\in V$, alors il existe une suite $\left(v_t^m\right)_{m\in N}$ telle que $v_t^m\in V^m$.

$$v_t^m\rightarrow v_t \text{ dans } V$$

$\left(v_t^m\right)_{m\in N}$ vérifie (3.11), où

$$\left\langle y_{tt}^{m},v_t\right\rangle+\mathbf{i}a\left(y_t^m,v_t\right)+\mathbf{i}\beta\left(t,y_t^m,v_t\right)=-\mathbf{i}\int_{\Gamma_1}by_{tt}^{m}\overline{v_t}d\Gamma_1. \tag{3.12}$$

Soit $\zeta_t\in D\left(\left]0,T\right[\right)$, on pose

$$\psi_t^m=\zeta_t v_t^m \qquad \text{et} \qquad \psi_t=\zeta_t v_t$$

Alors on a

$$\psi_t^m\rightarrow\psi_t \text{ dans } L^2\left(0,T,V\right)$$

Multiplions (3.12) par ζ_t et intégrons sur $]0,T[$, on trouve

$$\int_0^T \langle y_{tt}^m, \psi_t^m \rangle dt + \mathbf{i} \int_0^T a\left(y_t^m, \psi_t^m\right) dt + \mathbf{i} \int_0^T \beta\left(t, y_t^m, \psi_t^m\right) dt = -\mathbf{i} \int_0^T \int_{\Gamma_1} b y_{tt}^m \overline{\psi_t^m} d\Gamma_1 dt$$

Aprés intégration par parties on obtient

$$\int_0^T \langle y_t^m, \psi_{tt}^m \rangle dt + \mathbf{i} \int_0^T a\left(y_t^m, \psi_t^m\right) dt + \mathbf{i} \int_0^T \beta\left(t, y_t^m, \psi_t^m\right) dt = -\mathbf{i} \int_0^T \int_{\Gamma_1} b y_t^m \overline{\psi_{tt}^m} d\Gamma_1 dt$$

En passant à la limite, on trouve:

$$\begin{cases} \int_0^T \langle y_t, \psi_{tt} \rangle dt + \mathbf{i} \int_0^T a\left(y_t, \psi_t\right) dt + \mathbf{i} \int_0^T \beta\left(t, y_t, \psi_t\right) dt = -\mathbf{i} \int_0^T \int_{\Gamma_1} b y_t \overline{\psi_{tt}} d\Gamma_1 dt \\ \forall v_t \in V, \forall \zeta_t \in D\left(]0, T[\right). \end{cases}$$

$$y \in C^1(]0, T[, V) \blacksquare$$

4 Théorème de Stabilisation exponentielle

Dans ce paragraphe, on montre que la solution forte du problème (3.7a) - (3.7d) décroit exponentiellement dans l'espace d'énergie V. Par un argument de densité, on a le même resultat pour la solution faible. On commence par démontrer que le système (3.7a) -(3.7d) est dissipatif.

Posons

$$\begin{aligned} Q &= [S, T] \times \Omega \\ \Sigma_0 &= [S, T] \times \Gamma_0 \\ \Sigma_1 &= [S, T] \times \Gamma_1 \end{aligned}$$

Lemme 4.1.

Soit $E(.)$ l'énergie du système (3.7a) -(3.7d) *définie par*

$$\begin{aligned} 2E(t) = & \int_\Omega |\nabla_g y|_g^2 \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} k\,|y|^2 \, d\Gamma_1 \\ & - \int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,|y(t) - y(s)|^2 \, d\Gamma_1 ds \end{aligned} \tag{4.1}$$

Alors

$E : \Re^+ \to \Re^+$ *est une fonction décroissante et vérifie pour tout* $0 \leq S < T < \infty$.

$$\begin{aligned} E(S) - E(T) &= \int_{\Sigma_1} b\,|y_t|^2\,d\Sigma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} k'\,|y|^2\,d\Sigma_1 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Sigma_1} k''(t-s)\,|y(t) - y(s)|^2\,d\Sigma_1 ds \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Démonstration

D'après (3.1) et (3.3), $E(.)$ est positive

Pour $y_0 \in H^3(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $E(.)$ est dérivable et

$$\begin{aligned} 2E'(t) &= \int_\Omega \nabla_g \overline{y_t} \nabla_g y d\Omega + \int_\Omega \nabla_g \overline{y} \nabla_g y_t d\Omega + \int_{\Gamma_1} k'\,|y|^2\,d\Gamma_1 \\ &+ 2\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1} k y_t y d\Gamma_1 - \int_0^t \int_{\Gamma_1} k''(t-s)\,|y(t) - y(s)|^2\,d\Gamma_1 ds \\ &- \int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,\frac{d}{dt}(y(t) - y(s))\left(\overline{y(t) - y(s)}\right) ds d\Gamma_1. \end{aligned}$$

On multiplie (3.7a) par $\overline{y_t}$ et *on intègre* sur Ω,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (y_t - \mathbf{i}Ay)\,\overline{y_t} d\Omega = 0 \\ &\int_\Omega y_t \overline{y_t} d\Omega - \mathbf{i}\int_\Omega Ay\overline{y_t} d\Omega = 0 \\ &\int_\Omega |y_t|^2\,d\Omega - \mathbf{i}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\overline{y_t} d\Omega = 0 \end{aligned}$$

La formule de **Green** nous donne

$$\int_\Omega |y_t|^2\,d\Omega - \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_1} a_{ij}(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_{i.}} \nu_i \overline{y_t}.d\Gamma_1 + \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{y_t}}{\partial xj} d\Omega = 0.$$

On prend la partie imaginaire

$$\operatorname{Im}(\int_{\Omega}|y_t|^2\,d\Omega-\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Gamma_1}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y}{\partial x_i}\nu_i\overline{y_t}d\Gamma_1+\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{y_t}}{\partial xj}d\Omega)=0.$$

On a

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega}\langle\nabla_g y_t,\nabla_g\overline{y}\rangle_g d\Omega=\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\overline{y_t}d\Gamma_1.$$

On multiplie $(3.7d)$ par $\overline{y_t}$, et on intègre sur Γ_1.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\overline{y_t}d\Gamma_1 &= -\int_{\Gamma_1}k\left(0\right)y\left(t\right)\overline{y_t}d\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}\left(\int_o^t k'\left(t-s\right)y\left(s\right)ds\right)\overline{y_t}d\Gamma_1\\&\quad-\int_{\Gamma_1}by_t\overline{y}_t d\Gamma_1\end{aligned}$$

On prend la partie réelle

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\overline{y_t}d\Gamma_1 &= -\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}k\left(0\right)y\left(t\right)\overline{y_t}d\Gamma_1\\&\quad-\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^t k'\left(t-s\right)y\left(s\right)ds\right)\overline{y_t}d\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}b\left|y_t\right|^2d\Gamma_1\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}E'\left(t\right) &= \operatorname{Re}\int_{\Omega}\langle\nabla_g y_t,\nabla_g\overline{y}\rangle_g d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k'\left|y\right|^2d\Gamma_1+\\&\quad+\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}k\overline{y_t}yd\Gamma_1-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k''\left(t-s\right)\left|y\left(t\right)-y\left(s\right)\right|^2d\Gamma_1 ds\\&\quad-\operatorname{Re}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k'\left(t-s\right)\overline{y_t}\left(t\right)\left(y\left(t\right)-y\left(s\right)\right)d\Gamma_1 ds.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\overline{y_t}d\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k'\left|y\right|^2d\Gamma_1\\
&\quad+\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}k\overline{y_t}yd\Gamma_1-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k''(t-s)\left|y(t)-y(s)\right|^2d\Gamma_1ds\\
&\quad-\operatorname{Re}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k'(t-s)\overline{y_t}(t)\left(y(t)-y(s)\right)d\Gamma_1ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\Gamma}b\left|y_t\right|^2d\Gamma-\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}k(0)\,y(t)\,\overline{y_t}(t)\,d\Gamma_1\\
&\quad-\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}\overline{y_t}\left(\int_0^t k^{'}(t-s)\,y(s)\,ds\right)d\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k^{'}\left|y\right|^2d\Gamma_1\\
&\quad+\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}k\overline{y_t}yd\Gamma_1-\operatorname{Re}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k^{'}(t-s)\,\overline{y}_t(t)\left(y(t)-y(s)\right)d\Gamma_1ds\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k^{''}(t-s)\left(y(t)-y(s)\right)^2d\Gamma_1ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{\Gamma_1}b\left|y_t\right|^2d\Gamma_1-\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}k(0)y(t)\overline{y_t}(t)d\Gamma_1\\
&\quad+\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1}k\overline{y_t}yd\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k'\left|y\right|^2d\Gamma_1\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k''(t-s)\left|y(t)-y(s)\right|^2d\Gamma_1ds\\
&\quad-\operatorname{Re}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k'(t-s)\,.\overline{y_t}(t)\,y(s)\,dsd\Gamma_1\\
&\quad-\operatorname{Re}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k'(t-s)\,\overline{y_t}(t)\,y(t)\,dsd\Gamma_1\\
&\quad+\operatorname{Re}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k'(t-s)\,\overline{y_t}(t)\,y(s)\,d\Gamma_1ds.
\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} E^{'}(t) &= -\int_{\Gamma_1} b\left|y_t\right|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'\left|y\right|^2 d\Gamma_1 \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k''(t-s)\left|y(t)-y(s)\right|^2 d\Gamma_1 ds \\ &+\operatorname{Re}\int_0^t\int_{\Gamma_1} y\overline{y_t}\left(k-k(0)-\int_0^t k'(t-s)\,ds\right) d\Gamma_1. \end{aligned}$$

Puisque

$$\operatorname{Re}\int_{\Gamma_1} y\overline{y_t}\left(k-k(0)-\int_0^t k'(t-s)\,ds\right) d\Gamma_1 = 0$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E^{'}(t) &= -\int_{\Gamma_1} b\left|y_t\right|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'\left|y\right|^2 d\Gamma_1 \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k''(t-s)\left|y(t)-y(s)\right|^2 d\Gamma_1 ds. \end{aligned}$$

Donc $E(t)$ est décroissante et pour tout $0 \leq S < T < \infty$ on a

$$\begin{aligned} E(S)-E(T) &= \int_{\Sigma_1} b\left|y_t\right|^2 d\Sigma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} k'\left|y\right|^2 d\Sigma_1 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Sigma_1} k''(t-s)\left|y(t)-y(s)\right|^2 d\Sigma_1 ds. \blacksquare \end{aligned}$$

Le lemme suivant nous donne une identité trés utile pour la démonstration de notre résultat de stabilité.

Lemme 4.2.

Pour tout $0 \leq S < T < \infty$ *on a:*

$$\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{H.\nu}{\left|\nu_A(x)\right|_g^2} d\Sigma_0 - \int_{\Sigma_1}\left|\nabla_g y\right|_g^2 H\nu d\Sigma_1$$

$$+2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H(\overline{y})\, d\Sigma_1 + \operatorname{Im}\int_{\Sigma_1} y\overline{y_t} H\upsilon d\Sigma_1 =$$

$$2\operatorname{Re}\int_Q DH\left(\nabla_g y,\nabla_g y\right)dQ-\int_Q\left|\nabla_g y\right|_g^2 divHdQ$$

$$+\operatorname{Im}\int_\Omega y_tH\left(y\right)d\Omega\mid_S^T+\operatorname{Im}\int_Q\overline{y_t}ydivHdQ$$

Démonstration
Multiplions (3.7a) par $H.\nabla\overline{y}$, et intègrons sur Q. On a

$$\int_Q y_tH.\nabla\overline{y}dQ-\mathbf{i}\int_Q AyH.\nabla\overline{y}dQ=0 \tag{4.3a}$$

Au début, on va intégrer par parties sur (S,T), donc

$$\int_Q y_tH.\nabla\overline{y}dQ=\int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega\mid_S^T-\int_Q yH.\nabla\overline{y_t}dQ. \tag{4.3b}$$

Ensuite, nous appliquons la formule de **Green.** On trouve **.**

$$\int_Q y_tH.\nabla\overline{y}dQ=\int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega\mid_S^T-\int_\Sigma y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma+\int_Q\overline{y_t}div\left(y.H\right)dQ.$$

Alors$(4.3b)$ devient

$$\begin{aligned}\int_Q y_tH.\nabla\overline{y}dQ=&\int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega\mid_S^T-\int_\Sigma y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma\\&+\int_Q\overline{y_t}ydivHdQ+\int_Q\overline{y_t}H.\nabla ydQ.\end{aligned} \tag{4.3c}$$

D'autre par, on a $\overline{y_t}=-\mathbf{i}A\overline{y}$, donc (4.3c) aura la forme

$$\begin{aligned}\int_Q y_tH.\nabla\overline{y}dQ\quad=\quad&\int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega\mid_S^T-\int_\Sigma y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma\\&-\mathbf{i}\int_Q A\overline{y}H.\nabla\overline{y}dQ+\int_Q\overline{y_t}ydivHdQ.\end{aligned}$$

Insérant la formule de ci-dessus dans $(4.3c)$, on obtient

$$\int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega\mid_S^T-\int_\Sigma y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma-\mathbf{i}\int_Q A\overline{y}H.\nabla ydQ$$

$$+\int_Q \overline{y_t} y div H dQ - \mathbf{i}\int_Q AyH.\nabla\overline{y}dQ = 0.$$

et

$$\int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma - \mathbf{i}\left[\int_Q \left(A\overline{y}H.\nabla y + AyH.\nabla\overline{y}\right)dQ\right]$$

$$+\int_Q \overline{y_t} y div H dQ = 0.$$

Donc

$$\int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma - 2\mathbf{i}\operatorname{Re}\int_Q AyH.\nabla\overline{y}dQ + \int_Q \overline{y_t} y div H dQ = 0.$$

D'où:

$$2i\operatorname{Re}\int_Q AyH.\nabla\overline{y}dQ = \int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma + \int_Q \overline{y_t} y div H dQ.$$

Prenons les parties imaginaires, on obtient

$$2\operatorname{Re}\int_Q AyH.\nabla\overline{y}dQ = \operatorname{Im}\int_\Omega yH.\nabla\overline{y}d\Omega \mid_S^T - \operatorname{Im}\int_\Sigma y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma + \operatorname{Im}\int_Q \overline{y_t} y div H dQ \tag{4.3d}$$

De la formule de **Green**, on a

$$\begin{aligned}\int_Q AyH.\nabla\overline{y}dQ &= \int_\Sigma \nabla_g y\nu.H(y)\,d\Sigma - \int_Q \nabla_g y\nabla\left(H(y)\right)dQ\\ &= \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial\nu_A}H(y)\,d\Sigma - \int_Q \langle\nabla_g y, \nabla g\left(H(y)\right)\rangle dQ\end{aligned}$$

Donc, en appliquant la relation (v) du **lemme 2.2.4,** on trouve

$$\int_Q AyH.\nabla\overline{y}dQ = \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial\nu_A}H(y)\,d\Sigma - \int_Q DH\left(\nabla_g y, \nabla_g\overline{y}\right)dQ - \frac{1}{2}\int_Q div\left(\left|\nabla_g y\right|^2.H\right)dQ + \frac{1}{2}\int_Q \left|\nabla_g y\right|_g^2 div H dQ \tag{4.3e}$$

Pour continuer, on a besoin du lemme suivant.
Lemme 4.3.
Sur Γ_0 on a

$$\begin{aligned}
y &= y_t \\
&= 0; \\
|\nabla_g y|_g^2 &= \frac{1}{|\nu_A(x)|_g^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 \\
H(y) &= \frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right).
\end{aligned}$$

Ce lemme implique

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}\int_\Sigma \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H(\overline{y})\, d\Sigma &= 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu_A} H.\nabla \overline{y} d\Sigma_0 \\
&= 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2} d\Sigma_0 \\
&= 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2} d\Sigma_0.
\end{aligned}$$

Puisque $y = y_t = 0$ sur Σ_0, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\int_\Sigma y\overline{y_t} H.\nu d\Sigma &= \operatorname{Im}\int_{\Sigma_0} y\overline{y_t} H.\nu d\Sigma_0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

et

$$2\operatorname{Re}\int_\Sigma \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H(\overline{y})\, d\Sigma = 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H.\nabla \overline{y} d\Sigma_1,$$

$$\operatorname{Im}\int_\Sigma y\overline{y_t} H.\nu d\Sigma = \operatorname{Im}\int_{\Sigma_1} y\overline{y_t} H.\nu d\Sigma_1.$$

Ensuite, on va remplacer les conditions frontières dans ($4.3e$), on obtient

$$2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu_A} H(\overline{y})\, d\Sigma_0 + 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu_A} H(\overline{y})\, d\Sigma_1 - 2\operatorname{Re}\int_Q DH(\nabla_g y, \nabla_g \overline{y})\, dQ$$

$$-\int_{\Sigma_1}|\nabla_g y|_g^2\, H.\nu d\Sigma_1-\int_{\Sigma_0}|\nabla_g y|_g^2\, H.\upsilon d\Sigma_0+\int_Q|\nabla_g y|_g^2\, divHdQ=$$

$$\operatorname{Im}\int_\Omega yH\left(\overline{y}\right)d\Omega\,|_S^T-\operatorname{Im}\int_{\Sigma_1}y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma_1-\operatorname{Im}\int_{\Sigma_0}y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma_0$$

$$+\operatorname{Im}\int_Q\overline{y_t}ydivHdQ.$$

D'où

$$\operatorname{Re}\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)^2\frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2}d\Sigma_0+2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)H\left(\overline{y}\right)d\Sigma_1+\operatorname{Im}\int_{\Sigma_1}y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma_1$$

$$-\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)^2\frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2}d\Sigma_0-\int_{\Sigma_1}|\nabla_g y|_g^2\, H.\nu d\Sigma_1=$$

$$2\operatorname{Re}\int_Q DH\langle\nabla_g y,\nabla_g\overline{y}\rangle dQ-\int_Q|\nabla_g y|_g^2\, divHdQ+\operatorname{Im}\int_\Omega\overline{y}H\left(y\right)d\Omega\,|_S^T$$

$$+\operatorname{Im}\int_Q\overline{y_t}ydivHdQ.$$

Finalement, l'identité désirée est donnée par

$$\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)^2\frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2}d\Sigma_0-\int_{\Sigma_1}|\nabla_g y|_g^2\, H.\nu d\Sigma_1+2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)H\left(\overline{y}\right)d\Sigma_1$$

$$+\operatorname{Im}\int_{\Sigma_1}y\overline{y_t}H.\upsilon d\Sigma_1=2\operatorname{Re}\int_Q DH\langle\nabla_g y,\nabla_g y\rangle dQ$$

$$-\int_Q|\nabla_g y|_g^2\, divHdQ+\int_\Omega y_tH\left(y\right)d\Omega\,|_S^T+\operatorname{Im}\int_Q\overline{y_t}ydivHdQ\ \blacksquare$$

Notre résultat de stabilisation est le suivant.

Théorème 4.4.

Supposons satisfaites les conditions $(1.1),(1.2),(1.4),(3.1)-(3.6)$

Supposons en plus

(i) Il existe un champ de vecteur H *sur* $(\Re^n,g)$ *tel que*

$$\forall X\in T_x\Re^n,a>0,\ \langle D_XH,X\rangle_g\geq a\,|X|_g^2 \tag{4.4}$$

$$H.\nu < 0 \ sur \ \Gamma_0 \tag{4.5}$$

$$H.\nu \geq 0 \ sur \ \Gamma_1 \tag{4.6}$$

(ii) La seule solution du problème

$$\begin{aligned} y_t - \mathbf{i}Ay &= 0 \ dans \ \Omega \\ y &= 0 \ sur \ \Sigma_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu_A} &= 0 \ sur \ \Sigma \end{aligned}$$

est la solution trivial $y = 0$

Alors pour toute donnée initiale $y_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, *ils existent des constantes positives* M *et* ω *telles que*

$$E(t) \leq Me^{-\omega t}E(0).$$

Remarque

Des conditions suffisantes pour l'existence d'un champ de vecteur H vérifiant l'hypothèse(i) sont présentées dans **Yao** [12]. Des exemples sont donnés aussi dans le même article.

Démonstration

D'après **Komornik** [6], pour établir ce théorème il suffit de montrer que pour toute solution du problème (3.7a) - (3.7d) on a

$$\int_0^\infty E(t)\,dt \leq CE(S), \ \forall S > 0 \tag{4.7}$$

Soient $0 \leq S < T < \infty$.

Grâce à (4.4) l'identité du **lemme 4.2** devient

$$2a\int_Q |\nabla_g y|_g^2\,dQ \leq \int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2}d\Sigma_0 - \int_{\Sigma_1}|\nabla_g y|_g^2\,H.\nu d\Sigma_1$$

$$+2\,\mathrm{Re}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)H(\overline{y})\,d\Sigma_1 + \mathrm{Im}\int_{\Sigma_1}\overline{y_t}yH.\nu d\Sigma_1$$

$$+\int_Q |\nabla_g y|_g^2 \, divHdQ - \operatorname{Im}\int_\Omega yH\left(y\right)d\Omega\left.\right|_S^T - \operatorname{Im}\int_Q \overline{y_t} y divHdQ$$

D'autre part, la condition (4.5) donne

$$\begin{aligned}
2a\int_Q |\nabla_g y|_g^2 \, dQ \leq & -\int_{\Sigma_1} |\nabla_g y|_g^2 \, H.\nu d\Sigma_1 + 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H\left(\overline{y}\right) d\Sigma_1 \\
& + \operatorname{Im}\int_{\Sigma_1} y\overline{y_t} H.\nu d\Sigma_1 + \int_Q |\nabla_g y|_g^2 \, divHdQ \\
& - \operatorname{Im}\int_\Omega yH\left(y\right)d\Omega\left.\right|_S^T - \operatorname{Im}\int_Q \overline{y_t} y divHdQ
\end{aligned} \tag{4.8a}$$

Pour continuer, on a besoin des résultats suivants.

Lemme 4.5.
Soient $0 \leq S < T < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} & -\int_{\Sigma_1} |\nabla_g y|_g^2 \, H.\nu d\Sigma_1 + 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H\left(\overline{y}\right) d\Sigma_1 \\ \leq \; & C_0 \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 d\Sigma_1 \end{aligned} \tag{4.8b}$$

où
$C_0 = \left(\alpha_1 \sup \frac{|H|^2}{|H.\nu|}\right)^2$

Démonstration
On remarque que

$$2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H\left(\overline{y}\right) d\Sigma_1 = 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H.\nabla\overline{y} d\Sigma_1$$

Alors, grâce à (4.6) on a

$$\left| 2\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H.\nabla\overline{y} d\Sigma_1 \right| \leq 2\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right| \frac{|H|}{|H.\nu|} |\nabla\overline{y}| \, H.\nu d\Sigma_1$$

En appliquant l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, on a pour une constante positive $\alpha_1 > 0$

$$\begin{aligned} 2\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right| \frac{|H|}{|H.\nu|} |\nabla\overline{y}| \, H.\nu d\Sigma_1 \;\; \leq \;\; & \alpha_1 \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{|H|^2}{|H.\nu|} d\Sigma_1 \\ & + \frac{1}{\alpha_1}\int_{\Sigma_1} |\nabla y|^2 \, H.\nu d\Sigma_1 \end{aligned}$$

De la condition (1.4) on obtient

$$\alpha_1 \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{|H|^2}{|H.\nu|} d\Sigma_1 + \frac{1}{\alpha_1}\int_{\Sigma_1} |\nabla y|^2 \, H.\nu d\Sigma_1 \leq$$

$$\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}} \frac{|H|^2}{|H.\nu|} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} |\nabla_g y|_g^2 \, H.\nu d\Sigma_1$$

Alors

$$-\int_{\Sigma_1} |\nabla_g y|_g^2 \, H.\nu d\Sigma_1 + 2\,\mathrm{Re}\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) H(\overline{y})\, d\Sigma_1 \leq C_0 \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 d\Sigma_1 \qquad \blacksquare$$

Lemme 4.6.
$\forall \varepsilon > 0$

$$\left|\mathrm{Im}\int_{\Sigma_1} y\overline{y_t} H.\nu d\Sigma_1 - \mathrm{Im}\int_{\Omega} yH(y)\, d\Omega \;|_S^T\right| \leq$$

$$\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|}{2\alpha_1}\int_{\Sigma_1} |y|^2 d\Sigma_1 + 2\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}}|H| \int_{\Sigma_1} |y_t|^2 d\Sigma_1 + \varepsilon \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)|\, E(S)$$
$$+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \tag{4.9}$$

Démonstration

On applique l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** pour le terme suivant

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Im}\int_{\Sigma_1} y\overline{y_t} H.\nu d\Sigma_1\right| &\leq \frac{1}{2\alpha_1}\int_{\Sigma_1} |y|^2 H.\nu d\Sigma_1 \\
&\quad +2\alpha_1 \int_{\Sigma_1} |y_t|^2 H.\nu d\Sigma_1 \\
&\leq \frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|}{2\alpha_1}\int_{\Sigma_1} |y|^2 d\Sigma_1 \\
&\quad +2\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}}|H| \int_{\Sigma_1} |y_t|^2 d\Sigma_1
\end{aligned}$$

Maintenant, on majore l'autre terme

$$
\begin{aligned}
\left| -\operatorname{Im}\int_{\Omega} y.H\left(y\right)d\Omega \mid_{S}^{T}\right| &= \int_{\Omega}\left|y\left(T\right)H.\nabla y\left(T\right)-y\left(S\right)H.\nabla y\left(S\right)\right|d\Omega \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|\left(\int_{\Omega}\left|y\left(T\right)\right|\left|\nabla y\left(T\right)\right|d\Omega\right. \\
&\quad \left.+\int_{\Omega}\left|y(S)\right|\left|\nabla y(S)\right|d\Omega\right) \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\alpha_1}{2}\left|y\left(T\right)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla_g y\left(T\right)\right|_g^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\frac{\alpha_1}{2}\left|y\left(S\right)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla_g y\left(S\right)\right|_g^2\right)d\Omega\right) \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|\left(\int_{\Omega}\left(\frac{\alpha_1}{2}\left|y\left(T\right)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla_g y\left(T\right)\right|_g^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\frac{\alpha_1}{2}\left|y\left(S\right)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla_g y\left(S\right)\right|_g^2\right)d\Omega\right) \\
&\leq \varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|E\left(S\right) \\
&\quad +\left(\frac{\alpha_1\varepsilon}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|\right)\left|y\right|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\left|\operatorname{Im}\int_{\Sigma_1} y\overline{y_t}H.\nu d\Sigma_1-\operatorname{Im}\int_{\Omega} yH\left(y\right)d\Omega \mid_{S}^{T}\right| \leq
$$

$$
\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\right|}{2\alpha_1}\int_{\Sigma_1}\left|y\right|^2 d\Sigma_1+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\right|\int_{\Sigma_1}\left|y_t\right|^2 d\Sigma_1+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|E\left(S\right)
$$

$$
+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|\right)\left|y\right|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}. \blacksquare
$$

Lemme 4.7.

$$
\left|\int_{Q}\left|\nabla_g y\right|_g^2 divHdQ-\operatorname{Im}\int_{Q}\overline{y_t}ydivHdQ\right| \leq C_1\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1+\frac{\varepsilon}{2}\int_{Q}\left|\nabla_g\overline{y}\right|_g^2 dQ
$$

$$
+\left(\frac{\alpha_1}{2\varepsilon}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|\nabla_g\left(divH\right)\right|+\frac{1}{4}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\right)\int_{\Sigma_1}\left|y\right|^2 d\Sigma_1 \qquad (4.10)
$$

où

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{2} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |divH|$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} \int_Q \overline{y_t} y divH dQ &= \operatorname{Im} \int_Q \mathbf{i} A\overline{y} y divH dQ. \\ &= \operatorname{Re} \int_Q div \left(\nabla_g \overline{y}\right) y divH dQ \end{aligned}$$

En appliquant la formule de **Green**, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_Q divH \left(\nabla_g \overline{y}\right) y divH dQ &= \operatorname{Re} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) y divH d\Sigma_1 \\ &- \int_Q \left|\nabla_g y\right|_g^2 divH dQ \\ &- \int_Q y \nabla_g \overline{y} \nabla_g \left(divH\right) dQ. \end{aligned}$$

On estime les deux termes suivants

$$\left|\operatorname{Re} \int_{\Sigma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu_A} y divH d\Sigma_1\right| \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}} |divH| \int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right| |y| \, d\Sigma_1.$$

En appliquant **Cauchy -Schwarz**, on obtient
$\forall \alpha_1 > 0.$

$$\begin{aligned} \left|\operatorname{Re} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right) y divH d\Sigma_1\right| &\leq \frac{\sup_{x \in \overline{\Omega}} |divH|}{2} \left(\alpha_1 \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 d\Sigma_1\right) \\ &+ \frac{\sup_{x \in \overline{\Omega}} |divH|}{2} \left(\frac{1}{2\alpha_1} \int_{\Sigma_1} |y|^2 \, d\Sigma_1\right) \\ &\leq \frac{\alpha_1}{2} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |divH| \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 d\Sigma_1 \\ &+ \frac{1}{2\alpha_1} \int_{\Sigma_1} |y|^2 \, d\Sigma_1. \end{aligned}$$

Maintenant, on a la majoration suivante

$$\left|\operatorname{Re}\int_Q y\nabla_g y\nabla_g\left(divH\right)dQ\right|\leq\int_Q\left|y\nabla_g\left(divH\right)\right|\left|\nabla_g\overline{y}\right|dQ.$$

On applique encore une fois l'inégalité de **Cauchy -Schwarz** et la condition (1.4)

$\forall\varepsilon>0$

$$\int_Q\left|y\nabla_g\left(divH\right)\right|\left|\nabla_g\overline{y}\right|dQ\leq\frac{\varepsilon}{2}\int_Q\left|\nabla_g y\right|_g^2 dQ+\alpha_1\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|\nabla_g\left(divH\right)\right|^2}{2\varepsilon}\int_Q\left|y\right|^2 dQ$$

Alors, on a

$$\left|\operatorname{Re}\int_{\Sigma_1}\frac{\partial y}{\partial\nu_A}ydivHd\Sigma_1\right|\leq C_1\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1+\frac{1}{4}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\int_{\Sigma_1}\left|y\right|^2 d\Sigma_1.$$

$$C_1=\frac{\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|.$$

Donc

$$\left|\int_Q\left|\nabla_g y\right|_g^2 divHdQ-\operatorname{Im}\int_Q\overline{y_t}ydivHdQ\right|\leq C_1\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{2\varepsilon}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|\nabla_g\left(divH\right)\right|+\frac{1}{4}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\right)\int_{\Sigma_1}\left|y\right|^2 d\Sigma_1$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_Q\left|\nabla_g\overline{y}\right|_g^2 dQ \qquad \blacksquare$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial y}{\partial\nu_A}\right)^2 &= \left(-\int_0^t k'\left(t-s\right)y\left(s\right)ds-k\left(0\right)y\left(t\right)-by_t\right)^2\\ &= b^2\left|y_t\right|^2+\left(-\int_0^t k'\left(t-s\right)y\left(s\right)ds\right)^2\\ &\quad+\left(k\left(0\right)y\left(t\right)\right)^2+2k\left(0\right)y\left(t\right)\int_0^t k'\left(t-s\right)y\left(s\right)ds\\ &\quad+2by_t\left(\int_0^t k'\left(t-s\right)y\left(s\right)ds+k\left(0\right)y\left(t\right)\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\right)^2 d\Sigma_1\right| \leq 3[\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k^{'}(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2 d\Sigma_1$$
$$+\int_{\Sigma_1} k(0)\,|y|^2\,d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1} b^2\,|y_t|^2\,d\Sigma_1]. \tag{4.11}$$

Insérant $(4.8b)\,,(4.9)\,,(4.10)$ et (4.11) dans (4.7), on obtient

$$2a\int_Q |\nabla_g y|_g^2\,dQ \leq 3\,(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k^{'}(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2 d\Sigma_1\right]$$
$$3\,(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1} k(0)\,|y|^2\,d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}|by_t|^2\,d\Sigma_1\right]$$
$$+C_2\int_{\Sigma_1}|y|^2\,d\Sigma_1+\frac{\varepsilon}{2}\int_Q |\nabla_g \overline{y}|_g^2\,dQ$$
$$+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\,E(S)+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2\,d\Sigma_1$$
$$+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \tag{4.12}$$

où

$$C_2=\frac{\alpha_1}{2\varepsilon}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla_g(divH)|+\frac{1}{4}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|divH|+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\ \blacksquare$$

Lemme 4.8.

$$|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \leq \int_{\Sigma_1}|by_t|^2\,d\Sigma_1 \tag{4.13}$$

Démonstration
On procède comme dans [7], on suppose

$$|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} > \int_{\Sigma_1} |by_t|^2 \, d\Sigma_1$$

Donc il existe une suite (y_n) telle que

$$|y_n|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \equiv 1 \text{ et} \int_{\Sigma_1} |by_t^n|^2 \, d\Sigma_1 = 0$$

On majore $E(0)$
D'aprés la relation (4.12), on a

$$2a\int_Q |\nabla_g y|_g^2 \, dQ - \frac{\varepsilon}{2}\int_S^T E(t)\,dt - \varepsilon \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)|\, E(S) \le C_2 \int_{\Sigma_1} |y|^2 \, d\Sigma_1$$

$$+2\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H| \int_{\Sigma_1} |y_t|^2 \, d\Sigma_1 + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}$$

$$+2\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H| \int_{\Sigma_1} |y_t|^2 \, d\Sigma_1 + 3(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'(t-s).y(s).ds\right)^2 d\Sigma_1\right]$$

$$+3(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1} k(0)|y|^2 \, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} |by_t|^2 \, d\Sigma_1\right].$$

De(4.2), la formule de ci-dessus sera pour $S=0$

$$\left[\left(2a-\frac{\varepsilon}{2}\right)T - \varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right]E(0) \le 2\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}}|H| \int_{\Sigma_1} |y_t|^2 \, d\Sigma_1$$

$$+C_2\int_{\Sigma_1}|y|^2\,d\Sigma_1 + 2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2\,d\Sigma_1 + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}$$

$$+3(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2 d\Sigma_1\right]$$

$$+3\left(C_0+C_1\right)\left[\int_{\Sigma_1} k\left(0\right)\left|y\right|^2 d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}\left|by_t\right|^2 d\Sigma_1\right]+\int_0^T\int_{\Gamma_1} b\left|y_t\right|^2 d\Gamma_1 dt$$

$$+\left(2a-\frac{\varepsilon}{2}\right)T[\int_0^T\int_{\Gamma_1} k'\left|y\right|^2 d\Gamma_1 dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^t\int_{\Gamma_1} k''\left(t-s\right)\left|y\left(t\right)-y\left(s\right)\right|^2 d\Gamma_1 ds dt].$$

Donc

$$\left[\left(2a-\frac{\varepsilon}{2}\right)T-\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|\right]E\left(0\right)\leq\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|\right)$$

Alors, (y_n^0) est bornée

$$\left|y_n^0\right|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)}\leq cte.$$

Donc on peut extraire une sous suite $y_n^0\to\widetilde{y^o}$ qui converge faiblement dans $H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right).$

Soit $\widetilde{y}\left(t,\widetilde{y_0}\right)$la solution du problème $(3.7a)-(3.7\mathrm{d})$ correspondante à la condition initiale $\widetilde{y_0}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}_t\left(t,\widetilde{y_0}\right) &= iA\widetilde{y}\left(t,\widetilde{y_0}\right)\text{ dans }Q,\\
\widetilde{y}\left(t_0,\widetilde{y_0}\right) &= \widetilde{y_0}\text{ dans }\Omega,\\
\widetilde{y}\left(t_0,\widetilde{y_0}\right) &= 0\text{ sur }\Sigma,\\
\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial\nu_A}\left(t,\widetilde{y_0}\right) &= 0\text{ sur }\Sigma_1,
\end{aligned}$$

Alors $y_n(t,y_n^0)\to\widetilde{y}\left(t,\widetilde{y_0}\right)\star$ faiblement dans $L^\infty\left(0,T,H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right)\right)$et $y_n(t,y_n^0)$ est uniforment bornée dans $L^\infty\left(0,T,H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right)\right)$.

Par compacitie $y_n\left(t,y_n^0\right)\to\widetilde{y}\left(t,\widetilde{y_0}\right)$ faiblement dans $L^\infty\left(0,T,H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega\right)\right)$

Donc

$$\left|\widetilde{y}\left(t,\widetilde{y_0}\right)\right|_{C(S,T.L^2(\Omega))}=1$$

Mais d'aprés, l'unicitie de la solution on a

$$\widetilde{y}\left(t_0, \widetilde{y_0}\right) = 0 \text{ dans } Q$$

ce qui est une contradiction.
Alors:

$$|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \leq \int_{\Sigma_1} |by_t|^2 \, d\Sigma_{1.} \quad \blacksquare$$

Lemme 4.9.
Soit $e > 0$, *vérifiant*

$$e \inf_{\Gamma_1} k'(0) + 1 > 0 \tag{4.14}$$

Alors, pour tout $0 \leq S < T < \infty$, *on a*

$$\int_{\Sigma_1} \left(- \int_0^t k'(t-s)\, y(s)\, ds \right)^2 d\Sigma_1 \leq C_3 E(S).$$

où

$$C_3 = 2 \left[\frac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{e\delta f} + |h|_{L^\infty(\Gamma_1)} \right].$$

Démonstration
Soit $e > 0$ vérifiant (4.14) et posant

$$h(x) = \frac{k(0)}{\delta(1 + ek'(0))} \qquad x \in \Gamma_1.$$

La condition (4.14) *implique que* $h \geq 0$ et $h \in L^\infty(\Gamma_1)$.
Notons

$$I = \left(- \int_0^t k'(t-s)\, y(s)\, ds \right)^2 - h \int_0^t k''(t-s)\, |y(t) - y(s)|^2\, ds + hk'y^2$$

En appliquant l'inégalité de **Hölder**, on trouve

$$\begin{aligned} I \leq & \left(\int_0^t -k'(t-s)\, ds \right) \left(\int_0^t -k'(t-s)\, y^2(s)\, ds \right) \\ & -h \int_0^t k''(t-s)\, y^2(s)\, ds + 2hy \int_0^t k''(t-s)\, y(s)\, ds \\ & +hk'(0)\, y^2 - hk'y^2 + hk'y^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I &\leq (k(t)-k(0))\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds - h\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)\,ds \\
&\quad +2hy\int_0^t k''(t-s)\,y(s)\,ds + hk'(0)\,y^2.
\end{aligned}
$$

L'inégalité de **Cauchy-Schwarz** nous donne

$$
\begin{aligned}
I &\leq k(t)\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds - k(0)\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds \\
&\quad -h\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)\,ds + \frac{h}{e}y^2 \\
&\quad +eh\left(\int_0^t k''(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2 + hk'(0)\,y^2.
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
I &\leq k(t)\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds - k(0)\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds \\
&\quad -h\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)\,ds + h\left(\frac{1}{e}+k'(0)\right)y^2 \\
&\quad +eh\left(\int_0^t k''(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2
\end{aligned}
$$

De l'inégalite de **Hölder** et de $(3.3a)$, on déduit

$$
\begin{aligned}
I &\leq k(t)\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds + \frac{k(0)}{\delta}\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)\,ds \\
&\quad -h\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)\,ds + h\left(\frac{1}{e}+k'(0)\right)y^2 \\
&\quad +eh\left[\left(\int_0^t k'(t-s)\,ds\right)\left(\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)\,ds\right)\right]
\end{aligned}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
I &\leq k(t)\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds - k(0)\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds \\
&\quad -h\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)ds + h\left(\frac{1}{e}+k'(0)\right)y^2 \\
&\quad +eh\left(k'(0)-k'(t)\right)\left(\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)\,ds\right).
\end{aligned}
$$

Or (voir (3.1) et (3.3)) .

$$
k\int_0^t k'(t-s)\,y^2(s)\,ds < 0
$$

et

$$
ehk'\int_0^t k''(t-s)\,y^2(s)\,ds < 0
$$

De la définition de h , on déduit que

$$
I \leq \frac{1}{e\delta}k(0)\,y^2
$$

et par conséquent

$$
\int_{\Sigma_1} Id\Sigma_1 \leq \frac{1}{e\delta}\int_{\Sigma_1} k(0)\,y^2 d\Sigma_1
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_1}\left(-k'(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2 d\Sigma_1 &\leq \int_{\Sigma_1} hk''(t-s)\left(y(t)-y(s)\right)^2 d\Sigma_1 \\
&\quad -\int_{\Sigma_1} hk'y^2 d\Sigma_1 + \frac{1}{e\delta}\int_{\Sigma_1} k(0)\,y^2 d\Sigma_1.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2 d\Sigma_1 &\leq \frac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{e\delta f}\int_{\Sigma_1} fy^2 d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_1} k'y^2 d\Sigma_1. \\
&\quad + |h|_{L^\infty(\Gamma_1)}\left[\int_{\Sigma_1} k''(t-s)\left(y(t)-y(s)\right)^2 d\Sigma_1\right]
\end{aligned}
$$

Grâce à (3.5) et (4.2)

$$\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2 d\Sigma_1 \leq C_3 E(S).$$

où

$$C_3 = 2\left[\frac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{e\delta f} + |h|_{L^\infty(\Gamma_1)}\right]. \blacksquare$$

Alors, d'aprés (4.12) on a

$$2a\int_Q |\nabla_g y|^2\,dQ \leq 3(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'(t-s)\,y(s)\,ds\right)^2 d\Sigma_1\right]$$

$$3(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1} k(0)|y|^2\,d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1}|by_t|^2\,d\Sigma_1\right]$$

$$+C_2\int_{\Sigma_1}|y|^2\,d\Sigma_1 + \frac{\varepsilon}{2}\int_Q |\nabla_g y|_g^2\,dQ + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right)|y|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}$$

$$+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\,E(S) + 2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2\,d\Sigma_1$$

Grâce à (4.12)-(4.14) la formule de ci-dessus devient

$$\begin{aligned}2a\int_Q |\nabla_g y|^2\,dQ - \frac{\varepsilon}{2}\int_Q |\nabla_g \overline{y}|_g^2\,dQ \leq{}& \left[3C_3(C_0+C_1) + \varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right]E(S)\\ &+ C_2\int_{\Sigma_1}|y|^2\,d\Sigma_1 + 2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2\,d\Sigma_1\\ &+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right)\int_{\Sigma_1}|by_t|^2\,d\Sigma_1\\ &+3(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1}|by_t|^2\,d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1}k(0)|y|^2\,d\Sigma_1\right]\end{aligned}$$

De (4.1) on a

$$
\begin{aligned}
(4a-\varepsilon)\int_S^T E(t)\,dt \;&\leq\; [3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|]E(S)\\
&+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|y_t|^2\,d\Sigma_1\\
&+[3(C_0+C_1)|k(0)|^2_{L^\infty}+C_2]\int_{\Sigma_1}|y|^2\,d\Sigma_1\\
&+[3(C_0+C_1)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|]\int_{\Sigma_1}|by_t|^2\,d\Sigma_1
\end{aligned}
$$

De (3.5) et (4.2) on a

$$
\begin{aligned}
(4a-\varepsilon)\int_S^T E(t)\,dt \;&\leq\; [3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|]E(S)\\
&+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\frac{1}{\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|}\int_{\Sigma_1}b\,|y_t|^2\,d\Sigma_1\\
&+[3(C_0+C_1)|k(0)|^2_{L^\infty}+C_2]\frac{1}{f}\int_{\Sigma_1}(-k')\,|y|^2\,d\Sigma_1\\
&+[3(C_0+C_1)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|]\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|\int_{\Sigma_1}b\,|y_t|^2\,d\Sigma_1.
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
(4a-\varepsilon)\;\int_S^T E(t)\,dt \;&\leq\; [3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|]E(S)\\
&+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\frac{1}{\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|}E(S)\\
&+[3(C_0+C_1)|k(0)|^2_{L^\infty}+C_2]\frac{1}{f}E(S)\\
&+[3(C_0+C_1)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|]\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|\,E(S)\,.
\end{aligned}
$$

En choisissant

$$\varepsilon < 4a$$

on obtient

$$\int_S^T E(t)dt \leq CE(S)$$

où

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{(4a-\varepsilon)}[3C_3(C_0+C_1)+\varepsilon \sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|+2\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}}|H| \frac{1}{\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|} \\
&+[3(C_0+C_1)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|]\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b| \\
&+[3(C_0+C_1)|k(0)|_{L^\infty}^2+C_2]\frac{1}{f}].
\end{aligned}$$

Maintenant, en laissant T tendre vers l'infini, on déduit que:

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq CE(S).$$

D'où l'inégalite (4.4) ■

5 Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude du problème de la stabilisation uniforme pour l'équation de **Schrödinger** avec un feedback frontière de type mémoire agissant sur la condition de **Neumann**.

En utilisant les méthodes de la géométrie riemannienne et la technique des multiplicateurs, on a montré que la solution décroit exponentiellement dans l'espace d'énergie $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Cette étude ouvre la voix à de nombreuses questions, notamment:

1- Etude de la stabilisation uniforme frontière dans le cas d'une action de type mémoire agissant sur la condition de **Dirichlet.**

2- Etude de la stabilisation uniforme frontière dans le cas d'une action frontière non linéaire de type mémoire.

3- Les résultats obtenus ont éxigé certaines hypothèses géométriques sur le domaine Ω. Il est donc intéressant d'étudier le problème considéré dans ce mémoire en affaiblissant ces hypothèse

References

[1] **A. Aassila, M. M. Cavalcanti, et J. A. Soriano,** *Asymptoic stability and energy deay rate for solution of wave equation with memory in a star shaped domain,* SIAM J. Control Optim., 38 (2000), 1581-1602.

[2] **D-Azé,** Element d'analyse convexe et variationnell*e,* Ellipses, Paris, 1997.

[3] **S. Chai et Y. Guo,** *Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory,* Differential and Integral Equations, 17 (2004), 669-980.

[4] **A. Guesmia,** *Thèse de doctorat (Chapitre 8) , IRMA*,Strasbourg, (2000).

[5] **E. Hebey,** Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, Editeur Diderot, Paris, 1997.

[6] **V. Komornik,** Exact controlability and stabilization. The multiplier method*,* Masson, Paris, 1994*.*

[7] **I. Lasiecka and R.Triggiani,** *Optimal reglarity, exact controllability and uniform stabilization of Schrödinger equations with Dirichlet control,* Differrential and Integral Equations, 5 (1992), 521-535.

[8] **J. L. Lions,** Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linèaires*,* Dunod, Paris, 1969.

[9] **E. Machtyngier and E. Zuazua,** *Stabilization of Schrödinger equation,* Portugaliae Mathematica, 51 (1994), 243-255.

[10] **S. E. Rebiai,** *Boundary stabilization of Schrödinger equations with variable coefficients,* African Diaspora J.Mathemtics, 1 (2004), 33-41.

[11] **S. E. Rebiai,** *Uniform energy decay of Schrödinger equations with variable coefficients,* IMA Journal of Mathemtical Control and Information, 20 (2003), 335-345.

[12] **P. F. Yao,** *Observabiliy inequality for exact controllability of wave equations with variable coefficients,* SIAM .J. Control Optim, 37 (1999), 1568-1599.