الفصل الرابع

قابلية الاشتــقاق

تقديم : أبو بكر خالد سعد الله

قسم الرياضيات

المدرسة العليا للأساتذة

القبة، الجزائر

عناوين الدرس

1. مقدمة

2. الاشتقاق

3. التحدب

مراجع

4. أعمال موجهة

- **نصوص التمارين**
- **حلول التمارين**

1. مقدمة

سبق لك أن تعرفت على مفهوم الاشتقاق قبل البكالوريا، والهدف من هذا الدرس هو التذكير بذلك المفهوم، ثم توسيع مداه والتعرف على خواص جديدة تتعلق به. ولا شك أن طالب السنة الأولى في فرع العلوم الدقيقة ملمّ بعدة خواص تتعلق بمشتق دالة (نلاحظ أننا سنستعمل في هذا الدرس وفي الذي يليه مصطلحي "دالة" و "تابع" دون تمييز بينهما) مثل التفسير الهندسي للمشتق ونحو ذلك من النتائج الكثيرة (بوصفه يمثل ميل مماس بيان الدالة) في النقطة التي فاصلتها هي الفاصلة التي نشتق فيها الدالة). ورغم ذلك سنعود إلى تلك المفاهيم والخواص في هذا الفصل والذي يليه.

والجدير بالملاحظة أن مفهوم المشتق قد أدخل لتلبية رغبة المختصين في صياغة مسائل فيزيائية وهندسية بأدوات التحليل الرياضي وكذا بأدوات الهندسة التحليلية التي كانت ذات شأن منذ منتصف القرن السابع عشر. فمن المعلوم أن هذه الهندسة كان من ورائها الفرنسي ديكارت Descartes (1596–1650) والأنكليزي نيوتن Newton (1642–1727) والألماني لايبنيتز Leibniz (1646–1716). وقد كان ظهورها يضاهي ظهور نظرية المجموعات في العصر الحديث وبروز الهندسة الإقليدية في عصر الإغريق.

2. المشتق

تعريف

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال مفتوح I. ولتكن نقطة x_0 من I.

* نقول عن f إنه قابل للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي نرمز إليه بـ $f'(x_0)$ يحقق:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

* نقول إن f يقبل الاشتقاق على I إذا قبل الاشتقاق عند كل نقطة منه.

* نقول إن f إنه قابل للاشتقاق من اليمين عند x_0 إذا كانت النهاية التالية موجودة (التي تسمى عند وجودها المشتق من اليمين عند x_0) :

$$\lim_{h \xrightarrow{>0} 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

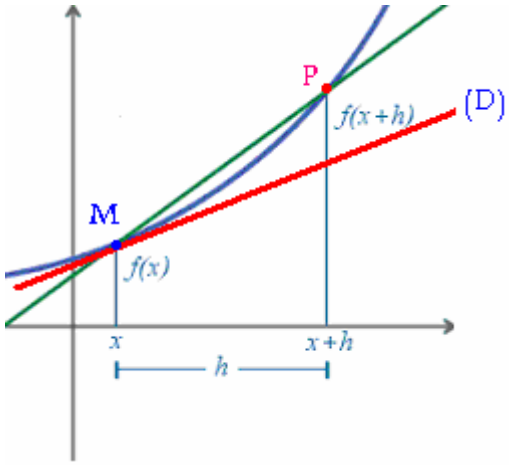
* نقول إن f إنه قابل للاشتقاق من اليسار عند x_0 إذا كانت النهاية التالية موجودة (التي تسمى عند وجودها المشتق من اليسار عند x_0) :

$$\lim_{h \xrightarrow{<0} 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

ملاحظات

1) المشتق، إن وجد، فهو وحيد (لماذا؟).

2) التفسير الهندسي للمشتق



نعتبر دالة f قابلة للاشتقاق عند نقطة x. يعني ذلك أن النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ موجودة وتساوي $f'(x)$. ماذا يمثل المشتق $f'(x)$ هندسيا؟ لنرسم بيان الدالة f كما هو مبيّن في الشكل ولنكتب معادلة المستقيم (MP). إنها من الشكل $y=ax+b$ ... وإذا كانت نيّتنا جعل h يؤول إلى 0، أي النقطة P تؤول إلى M فيستحسن كتابة المعادلة $y=ax+b$ على الشكل $y=a(h)x+b(h)$ لإبراز أن المعاملين a و b يتغيران بتغير h. لندقق أكثر في هذه المعادلة ... إنها تحقق المساواتين :

$$f(x)=a(h)x+b(h)$$
$$f(x+h)=a(h)(x+h)+b(h).$$

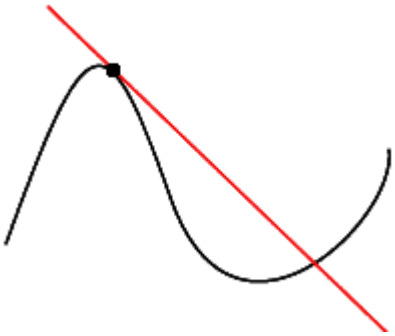
ومنه يأتي :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a(h)$$

مع العلم أن $a(h)$ يشير إلى ميل المستقيم (MP). ثم إن القول بأن f يقبل الاشتقاق عند x معناه وجود النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$، أي النهاية $\lim_{h\to 0}a(h)$. وماذا

تمثل هذه النهاية للمعاملات $a(h)$؟ إنها تمثل ميل المستقيم الذي نحصل عليه عندما تؤول النقطة P إلى M (المستقيم (D) في الشكل أعلاه) ... هذا المستقيم هو مماس بيان f عند النقطة M.
خلاصة القول إن $f'(x)$ يمثل ميل المماس عند النقطة من بيان f ذات الفاصلة x.

لعله من المفيد في هذا السياق أن نلاحظ بأن المماس عند نقطة لبيان دالة يمكنه أن يقطع البيان في نقطة أخرى منه ... كما يبيّن الشكل التالي :



3) لاحظ أن قابلية الاشتقاق عند نقطة تكافئ وجود وتساوي المشتقين من اليمين ومن اليسار عند تلك النقطة (برهن على ذلك).

4) يمكن كتابة هذا التعريف على الشكل التالي : نقول عن f إنه قابل للاشتقاق عند x_0 إذا وجد عدد حقيقي نرمز إليه بـ $f'(x_0)$ يحقق :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h)$$

علما أن رمز لوندو Landau $o(h)$ كمية تتعلق بـ h وتحقق

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$$

وهكذا نلاحظ أن الدالة $h\mapsto f(x_0+h)$ تكتب على شكل مجموع كمية مهملة ودالة تآلفية g معرفة بـ $g(h)=f(x_0)+f'(x_0)h$.

يمكن أن نفسر ذلك بأن أفضل تقريب للدالة المعطاة بجوار x_0 دالة تآلفية هي الدالة g. ومن جهة أخرى نحن نعلم أن بيان الدالة g هو مماس بيان f عند x_0.

لإدراك أن تقريب f بـ g تقريب جيد، اعتبر مثلا الدالة $f:x\mapsto x^3+x^2$، واحسب $f(1.017)$ باعتبار $x_0=1$ و $h=0.017$ فستجد أن

$$f(1.017)=(f(1+h)=2+5h+4h^2+h^3=g(h)+4h^2+h^3$$

وبذلك ترى أن تعويض القيمة $f(1.017)$ بالقيمة $g(h)$ تجعلنا نرتكب خطأ يساوي $4h^2+h^3$، أي 0.00116 علما أن $f(1.017)=2.86160913$ وأن $g(0.17)=2.085$.

إليك أمثلة أخرى نقدمها في هذا الجدول :

العدد h يحقق	العبارة بدلالة h	تقريب العبارة	الخطأ أصغر من
$h\in IR$	$(1+h)^2$	$1+2h$	h^2
$\lvert h\rvert<1$	$(1+h)^3$	$1+3h$	$4h^2$
$\lvert h\rvert<1$	$\sqrt{1+h}$	$1+\frac{1}{2}h$	$\frac{h^2}{2}$

$2h^2$	$1 - h$	$\frac{1}{1+h}$	$\|h\| < 0.5$

أمثلة شهيرة

من الأمثلة المتداولة نشير إلى :

1) مشتق التابع الثابت هو 0.

2) مشتق التابع f المعرف بـــ $f(x) = x^n$ هو $f'(x) = nx^{n-1}$ وهذا من أجل كل عدد صحيح. لرؤية ذلك يكفي أن نرى كيف يكون الحال عنـــدما يكـــون n طبيعيا (لماذا؟). لدينا :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \right)$$

$$= n x_0^{n-1}.$$

3) مشتق التابع f المعرف بـــ $f(x) = |x|$ من أجل $x \neq 0$ هو (أثبـــت ذلك) :

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ -1 & : x > 0 \end{cases}$$

أما عند النقطة $x_0 = 0$ فالتابع لا يقبل الاشتقاق لأن النهاية

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

غير موجودة ... ذلك أن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار عند 0 :

.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{|x|}{x} = 1 \neq \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{|x|}{x} = -1$$

4) مشتق التابع الجيبي f المعرف بـــ $f(x) = \sin x$. لـــدينا، باســـتخدام العلاقة المثلثية الشهيرة

$$: \sin x - \sin x_0 = 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right).\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}$$

$$= \cos x_0 \times 1$$

$$= \cos x_0 .$$

ومنه العلاقة $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

يمكن إثبات بنفس الكيفية أن $(\cos x)' = -\sin x$.

5) مشتق التابع الأسي f المعرف بـــ $f(x) = e^x$. لدينا، باستخدام العلاقة $: \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}.\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}$$
$$=e^{x_0}.\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}$$
$$=e^{x_0}.$$

ومنه $f'(x)=(e^x)'=e^x$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

يمكن أن نستنتج بواسطة القاعدة التي تعطي مشتق التابع العكسي بأن $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$. كما يمكن البرهان على تلك العلاقة باستخدام خصائص اللوغاريتم.

نظرية

لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال مفتوح I. إذا كانت قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0 من I فإنها مستمرة عند هذه النقطة.

البرهان

نلاحظ أن استمرار f عند x_0 يعني $\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0$. لدينا المساويات التالية :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\times(x-x_0)$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\times\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$
$$=f'(x_0)\times 0$$
$$=0.$$

ومنه يأتي استمرار f عند x_0.

ملاحظة

لاحظ أن عكس النظرية غير صحيح : استمرار دالة لا يؤدي إلى قابلية الاشتقاق. مثـــل ذلك : الدالة المعرفة بـــ $f(x)=|x|$ مستمر عند 0، ورغم ذلك فهي لا تقبل الاشتقاق عند هذه النقطة كما سبق أن رأينا.

نظرية

لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ و $g:I\to\mathbb{R}$ دالتين حقيقيتين معرفتين على مجـــال مفتوح I وقابلتين للاشتقاق عند نقطة x_0 من I. حينئذ يتحقق ما يلي :

1) المجموع $f+g$ يقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا :

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

2) الجداء $f.g$ يقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا :

$$(f.g)'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0).$$

3) إذا كان $g(x_0)\neq 0$ فإن الكسر $\frac{f}{g}$ يقبل الاشتقاق ولدينا :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

البرهان

1) سهل الإثبات.

2) باعتبار $x\neq x_0$ يمكن أن نكتب :

$$\frac{f.g(x)-f.g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

ومنه (لاحظ أننا سنستعمل استمرار g الذي يأتي من قابليته للاشتقاق، وكذلك توزيع النهايات عندما نعلم مسبقا بأنها موجودة) :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f.g(x)-f.g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0).$$

3) من المعلوم أنه إذا كان g مستمرا عند x_0 (وهو كذلك لأنه قابل للاشتقاق) وكان $g(x_0)\neq 0$ فإنه يوجد جوار V لـــ x_0 بحيث :

$$\forall x\in V,\quad g(x)\neq 0.$$

لنعتبر $x\in V$ ونكتب :

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0).g(x).g(x_0)}$$

$$=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0).g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0).g(x).g(x_0)}$$

$$=\frac{1}{g(x).g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

وبالتالي :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x).g(x_0)}\right)\times$$

$$\left[\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)g(x_0)-f(x_0)\left(\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{g(x_0).g(x_0)}\times\left[f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)\right]$$

$$=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

ومنه المطلوب.

نتيجة

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال مفتوح I وقابلة للاشتقاق عند نقطة x_0 من I. حينئذ يكون التابع f^n قابلا للاشتقاق من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم n، ولدينا :

$$(f^n)'(x_0) = nf^{n-1}(x_0)f'(x_0) .$$

لرؤية ذلك يكفي تطبيق الخاصية 2) المتعلقة بالجداء الواردة في النظرية السابقة (أثبت ذلك).

مثال

ما هو مشتق كثير الحدود المعرّف بـــ (حيث $x \in \mathbb{R}$):

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 ?$$

تأكد استنادا إلى ما سبق أن المطلوب هو :

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1 .$$

نظرية

لتكن I و J مجالين مفتوحين من $\mathbb{R}$ ، و $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على I بحيث $f(I) \subset J$، و $g : J \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على J. نفرض :

1) $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0 من I

2) $g : J \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة $f(x_0)$.

حينئذ يكون التركيب $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ قابلا للاشتقاق عند النقطة x_0 ولدينا :

$$(g \circ f)'(x_0) = \big(g'(f(x_0))\big) \times f'(x_0) .$$

البرهان

أولا : إليك هذا البرهان الخاطئ والمفيد في آن واحد : نكتب

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{f(x)-f(x_0)}\times\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

ونلاحـــظ أن وضع $y=f(x)$ و $f(x_0)=y_0$ واستخدام استمرار f عند x_0 يؤدي إلى الاستلزام :

$$y\to y_0 \quad\Leftarrow\quad x\to x_0.$$

وعليه :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{f(x)-f(x_0)}\times\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{f(x)-f(x_0)}\times\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\times\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=g'(y_0)\times f'(x_0).$$

وبذلك ينتهي هذا البرهان لأن $\lim_{x\to x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=(g\circ f)'(x_0)$.

هناك خطأ في البرهان. ما هو؟

الخطأ يكمن في افتراضنا ضمنيا (عندما وضعنا الفرق $f(x)-f(x_0)$ في المقام) بأن $f(x)-f(x_0)\neq 0$.

ثانيا : إليك برهانا صحيحا : نضع $y_0=f(x_0)$ ونعرّف الدالة :

$$\varphi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & : y\neq y_0,\\ g'(y_0) & : y=y_0.\end{cases}$$

لاحظ أن :

1) $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=g'(y_0)=\varphi(y_0)$.

2) $g(y)-g(y_0)=(y-y_0)\varphi(y)$ من أجل كل $y\in J$ ... حتى عند $y=y_0$.

لنعتبر بعد ذلك $x\in I$ حيث $x\neq x_0$ ولنكتب (مع وضع $y=f(x)$ و $f(x_0)=y_0$) :

$$\begin{aligned}g\circ f(x)-g\circ f(x_0)&=g(y)-g(y_0)\\&=(y-y_0)\varphi(y).\end{aligned}$$

ينتج عن ذلك أن :

$$\begin{aligned}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}&=\frac{y-y_0}{x-x_0}\varphi(y)\\&=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\varphi(y).\end{aligned}$$

وبالتالي (بالاستعانة بنا سبق، وبوجه خاص الملاحظة 1) السالفة الذكر) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\varphi(y)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{y\to y_0}\varphi(y)\\&=f'(x_0)\times\varphi(y_0)\\&=f'(x_0)\times g'(y_0)\\&=f'(x_0)\times g'\big(f(x_0)\big).\end{aligned}$$

وبذلك ينتهي البرهان.

أمثلة

1) يمكن الاستفادة من مشتق التابع الجيبي لاستنتاج مشتق التابع جيب التمام بملاحظة أن $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. لتنفيذ ذلك نضع $g(x) = \sin x$ و $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ في النظرية السابقة فنجد أن $g \circ f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

ونتيجة النظرية تقول عندئذ إن :

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \times f'(x) \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \times 1 \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\ &= -\sin x .\end{aligned}$$

2) نعتبر التابع

$$f(x) = \begin{cases} x . \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

هل يقبل f الاشتقاق عند نقطة $x \neq 0$؟ بتطبيق النظرية السابقة (بوجه خاص) وقاعدة مشتق جداء تابعين نحصل على المطلوب :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sin \frac{1}{x} + \left(x \cos \frac{1}{x} \right) \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

لكننا لا نستطيع تطبيق النظرية السابقة عند النقطة $x = 0$. هذا لا يعني بطبيعة الحال أن f لا يقبل الاشتقاق عند تلك النقطة. ولذلك ينبغي علينا البحث بطريقة أخرى عما إذا كان المشتق موجودا ام لا عند 0. أفضل طريقة هنا هي التعريف، أي أننا نبحث عما إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ موجودة أم لا. لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

نلاحظ أن هذه النهاية غير موجودة لأن (مثلا) اختيار $x=\frac{1}{n\pi}$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم يعطي $\lim_{n\to+\infty}\sin n\pi=0=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. أما اختيار $x=\frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$ حيث n عدد طبيعي فيعطي $\lim_{n\to+\infty}\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}=1=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. إن اختلاف النهايتين السابقتين يؤدي إلى عدم وجود النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$. ومنه فإن f لا يقبل الاشتقاق عند 0.

3) نعتبر التابع

$$f(x)=\begin{cases}x^2.\sin\frac{1}{x} & : x\neq 0,\\ 0 & : x=0.\end{cases}$$

هل يقبل f الاشتقاق عند نقطة $x\neq 0$؟ بتطبيق النظرية السابقة (بوجه خاص) وقاعدة مشتق جداء تابعين نحصل على المطلوب :

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + \left(x^2 \cos\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

لكننا لا نستطيع تطبيق النظرية السابقة عند النقطة $x = 0$. هذا لا يعني بطبيعة الحال أن f لا يقبل الاشتقاق عند تلك النقطة. ولذلك ينبغي علينا البحث بطريقة أخرى عما إذا كان المشتق موجودا أم لا عند 0. أفضل طريقة هنا هي التعريف، أي أننا نبحث عما إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ موجودة أم لا. لدينا :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x}$$
$$= 0.$$

لاحظ أننا استفدنا هنا من العلاقة التالية (مثلا) التي تؤدي إلى النهاية المحصل عليها :

$$0 \le \lim_{x \to 0} \left| x \sin\frac{1}{x} \right| \le \lim_{x \to 0} |x| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

خلاصة القول أن التابع المعتبر يقبل الاشتقاق في كل مكان ... وقد حسبنا مشتقه عند كل نقطة $x \in \mathbb{R}$.

نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية متباينة ومستمرة على مجال مفتوح I .

نفرض أن f تقبل الاشتقاق عند x_0.

عندئذ تقبل الدالة العكسية $f^{-1} : f(I) \to I$ الاشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$ إذا وفقط إذا كان $f'(x_0) \neq 0$، ولدينا :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

البرهان

* نفرض في البداية أن $f^{-1} : f(I) \to I$ تقبل الاشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$. هل $f'(x_0) \neq 0$ ؟ لرؤية ذلك نكتب :

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

ونشتق التركيب عند x_0 لأن شروط النظرية السابقة محققة :

$(f^{-1})'(f(x_0)) \times f'(x_0) = 1$ ، $(f^{-1})'(y_0) \times f'(x_0) = 1$. تثبت هذه العلاقة أن $f'(x_0) \neq 0$ ولولاه لانعدم الطرف الثاني في المساواة السابقة.

* نفرض الآن أن $f'(x_0) \neq 0$. هل الدالة العكسية تقبل الاشتقاق عند $y_0 = f(x_0)$؟ لندرس النهاية

$$\lim_{y = f(x) \to y_0 = f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} .$$

لاحظ أننا استفدنا من الخاصية التالية في المساواة السابقة : استمرار f وتباينها يؤديان إلى استمرار الدالة العكسية. ولذلك فإن التكافؤ التالي صحيح :

$$f(x) = y \to f(x_0) = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad x \to x_0 .$$

من جهة أخرى نعلم أن النهاية $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجودة، ولدينا $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. ومنه فإن الشرط $f'(x_0) \neq 0$ يؤدي إلى

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

وعليه نستطيع تأكيد وجود النهاية $\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$ وتحديد قيمتها والحصول على المطلوب :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

أمثلة

1) الدالة $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ المعرفة بـــ $f(x)=\sin x$ متباينة وقابلة للاشتقاق ولذلك فالدالة المسماة قوس الجيب arcsin والمعرفة بـــ

$$\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$\arcsin x=f^{-1}(x)$ قابلة للاشتقاق عند أية نقطة من المجال $]-1,1[$ ... ومشتقها هو

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{f'(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

لاحظ ان قوس الجيب دالة لا تقبل الاشتقاق عند طرفي المجال 1 و 1− لأن الشرط اللازم والكافي $f'(x_0)\neq 0$ غير محقق عند 1 و 1− إذ أن $f'(-1)=f'(1)=0$.

2) تطرقنا إلى الدالة المعرفة بـــ $f(x)=x^n$ من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*$، ونحن نعلم أن $f'(x)=nx^{n-1}$. تريد تعميم هذه القاعدة إلى الحالة التي لا ينتمي فيها n إلى $\mathbb{N}$.

من أجل ذلك نعرف الدالة $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بـــ $g(x)=x^n$ عندما يكون n فرديا.

أما إن كان n زوجيا فنضع $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ حيث $h(x)=x^n$.

نعلم أن كلا من الدالتين g و h تقابل وأن $g^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$، وكذلك $h^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$، وأن مشتق كل منهما غير منعدم إذا استثنينا 0.

ولذلك فالدالة العكسية لكل منهما تقبل الاشتقاق في مجال تعريفها باستثناء 0. ولدينا

$$\begin{aligned}g^{-1}(x)&=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}\\&=\frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}}\\&=\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}\\&=\frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}.\end{aligned}$$

يمكن أن نكتب نتيجة مماثلة خاصة بالدالة h :

$$\begin{aligned}h^{-1}(x)&=\frac{1}{h'(h^{-1}(x))}\\&=\frac{x^{\frac{1-n}{n}}}{n}.\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد وضحنا أن مشتق الدالة المعرفة بـــ $u(x)=x^\alpha$ يحسب عموما وفق القاعدة $u'(x)=x^{\alpha-1}$. يمكن أن نواصل الاستدلال وإثبات أن الدالة

$u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ المعرفة بـــ $u(x) = x^{\alpha}$ تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها، وهذا مهما كان الأس $\alpha > 0$، ولدينا : $u'(x) = x^{\alpha-1}$. ونحصل على ذلك باستعمال كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$.

ننهي هذا المقطع بتقديم الجدولين التلخيصيين التاليين :

من قواعد الاشتقاق

f	f'
ku	ku'
$u + v$	$u' + v'$
$u.v$	$u'.v + u.v'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^n	$nu^{n-1}u'$

$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$e^u.u'$
$g(u)$	$g'(u).u'$

من المشتقات الشهيرة

$f(x)$	$f'(x)$
k (ثابت)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

3. التحدب

من الخواص المهمة التي نصادفها في الدوال هي تلك المرتبطة بمفهوم التحدب وعلاقته بالاشتقاق. الهدف من هذا المقطع هو التطرق بإيجاز إلى بعض هذه النتائج مهملين عموما البراهين.

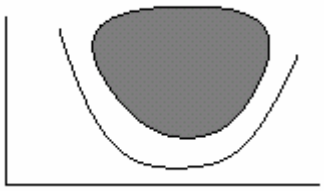
تعريف

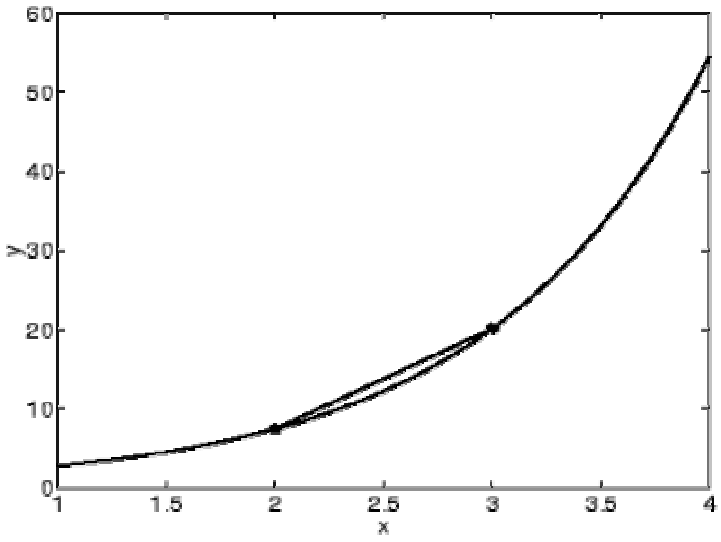
نقول عن دالة $f : I \to \mathbb{R}$ إنها محدبة (مقعرة، على التوالي) إذا تحققت الخاصية التالية: من أجل كل نقطتين $M_1(x_1, f(x_1))$ و $M_2(x_2, f(x_2))$ من بيان f فإن كل نقطة $M(x, f(x))$ من البيان تقع تحت (فوق، على التوالي) القطعة المستقيمة M_1M_2 من أجل كل x ينتمي إلى المجال $[x_1, x_2]$.

ملاحظة

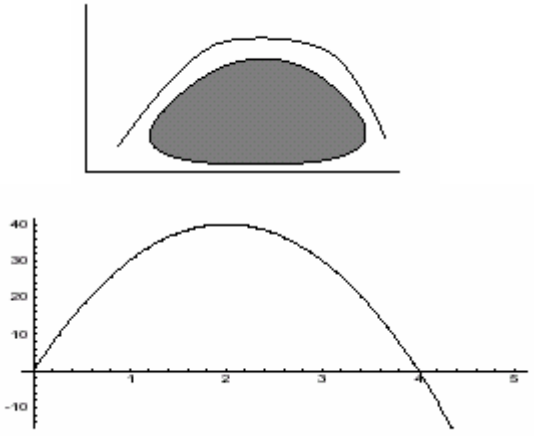
القول بأن الدالة f مقعرة يكافئ القول بإن f – محدبة.

مثال : هذان بيانان لدالتين محدبتين.





وهذان بيانان لدالتين مقعرتين :



نظرية :

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية حيث I مجال. تكون f محدبة إذا كان :

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0,1] : f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2) .$$

البرهان

تمثل هذه النتيجة تعبيرا تحليليا لما ورد في التعريف السابق. وضح ذلك.

يمكن أيضا إثبات النتيجة التالية الخاصة بالدوال المحدبة والمستمرة :

نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية مستمرة على المجال I.
تكون f محدبة على I إذا وفقط إذا تحققت العلاقة :

$$\forall x, y \in I : \quad f(\frac{x+y}{2}) \le \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right).$$

نظرية

إذا كانت دالة $f : I \to \mathbb{R}$ محدبة على مجال متراص فإنها مستمرة وتقبل عند كل نقطة مشتقا من اليمين ومشتقا من اليسار.

البرهان

لنبين أولا بأن الدالة g المعرفة على المجال المعطى باستثناء x_0 بـ $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ متزايدة. ليكن x و x' عنصران من المجال بحيث $x < x_0 < x'$. لاحظ في هذه الحالة أن العلاقة $g(x) \le g(x')$ تكافئ

$$f(x) - f(x_0) \ge (x - x_0)g(x')$$

ذلك لأن $x_0 - x > 0$. ثم إن $x'-x_0 > 0$ ومنه ينتج أن العلاقة السابقة تكافئ

$$(x'-x_0)\big(f(x)-f(x_0)\big) \geq (x-x_0)\big(f(x')-f(x)\big) .$$

وهكذا يتضح أن $g(x) \leq g(x')$ تكافئ

$$f(x_0)(x-x') \geq f(x')(x-x_0) + f(x)(x_0-x') .$$

أي :

$$f(x_0) \leq \frac{x-x_0}{x-x'} f(x') + \frac{x_0-x'}{x-x'} f(x) .$$

مع العلم أن $x = \frac{x-x_0}{x-x'} x' + \frac{x_0-x'}{x-x'} x$ وأن $\frac{x-x_0}{x-x'} + \frac{x_0-x'}{x-x'} = 1$.

وهذا معناه أن المتباينة السابقة تعبر عن خاصية التحدب التي تتمتع بها الدالة f .

وبذلك نكون قد بينا الاستلزام :

$$x < x_0 < x' \;\Rightarrow\; g(x) \leq g(x') .$$

كما نحصل بنفس الطريقة على الاستلزام :

$$x < x' < x_0 \;\Rightarrow\; g(x) \leq g(x')$$

وهذا باثبات أنه يكافئ الاستلزام التالي المعبر عن تحدب الدالة f :

$$x < x' < x_0 \;\Rightarrow\; f(x') \leq \frac{x-x'}{x_0-x} f(x) + \frac{x'-x}{x_0-x} f(x_0) .$$

وبنفس الطريقة أيضا ندرس الحالة $x_0 < x < x'$ فيأتي تزايد الدالة g .

لما كانت g متزايدة على المجموعة $[a,b]-\{x_0\}$ فإنها محدودة ومتزايدة على كل من المجالين $[a,x_0[$ و $]x_0,b]$. ومنه فإن الحد الأعلى على $[a,x_0[$ موجود وكذا الحد الأدنى على $]x_0,b]$ ولدينا العلاقتين :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sup_{x \in [a,x_0[} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \inf_{x \in]x_0,b]} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

وهو ما يثبت وجود المشتق من اليمين والمشتق من اليسار عند x_0. ومن ثم نستنتج الاستمرار عند x_0 أيضا لأن قابلية الاشتقاق من اليمين ومن اليسار تثبت أن

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x)-f(x_0) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x)-f(x_0) = 0$$

أي :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0).$$

نظرية

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق. حتى تكون f محدبة يلزم ويكفي أن تكون الدالة المشتقة f' متزايدة.

البرهان

1) نثبت أن التحدب يؤدي إلى تزايد f' : إذا كانت الدالة محدبة فالنظرية السابقة تبين أن لها مشتقا من اليمين ومشتقا من اليسار عند كل نقطة داخلية من المجال. وبالإضافة إلى ذلك فإن كان $x < x' < x''$ نجد

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leq \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$$

لأن الدالة $x \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ متزايدة على مجموعة تعريفها عندما يثبت y (وهو ما أثبت في النظرية السابقة). ومنه

$$\lim_{x \xrightarrow{<} x'} \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leq \lim_{x' \xrightarrow{<} x''} \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$$

أي أن $f'(x+0) \le f'(x'+0)$. وبالتالي فإن تحدب الدالة f يؤدي إلى تزايد الدالة $x \mapsto f'(x+0)$. ونبين بنفس الطريقة تزايد المشتق من اليسار $x \mapsto f'(x-0)$ (لكن ذلك ليس مهما هنا). وبما أننا نعلم أن الدالة f قابلة للاشتقاق (فرضا) فإن :

$$f'(x) = f'(x+0) \le f'(x'+0) = f'(x') .$$

ومنه يأتي تزايد f' .

2) نفرض أن f تقبل الاشتقاق على $[a,b]$ وأن الدالة المشتقة f' متزايدة. وليكن x_1 و x_2 عنصرين من المجال $[a,b]$ بحيث $x_1 < x_2$ و α عنصرا من $[0,1]$. نضع $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ ونطبق نظرية التزايدات المنتهية مرتين فيتضح وجود عددين c_1 من $]x_1,x[$ و c_2 من $]x,x_2[$ بحيث :

$$f(x_1) = f(x) + (x_1 - x)f'(c_1)$$
$$f(x_2) = f(x) + (x_2 - x)f'(c_2)$$

ومنه يأتي بالضرب :

$$\alpha.f(x_1) = \alpha.f(x) + \alpha.(x_1 - x)f'(c_1)$$
$$(1-\alpha).f(x_2) = (1-\alpha).f(x) + (1-\alpha).(x_2 - x)f'(c_2)$$

ثم نجمع فنحصل على :

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha).f(x_2) = f(x) + \alpha(x_1 - x)f'(c_1) + (1-\alpha).(x_2 - x)f'(c_2) .$$

ولما كان $x_1 - x = (1-\alpha)(x_1 - x_2)$ و $x_2 - x = \alpha(x_2 - x_1)$ فإن

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha).f(x_2) = f(x) + \alpha(1-\alpha)(x_2 - x_1)\big(f'(c_2) - f'(c_1)\big)$$

نستفيد من كون α و $1-\alpha$ و $x_2 - x_1$ و $f'(c_2) - f'(c_1)$ موجبة فنحصل على

$$f(x) + \alpha(1-\alpha)(x_2 - x_1)\big(f'(c_2) - f'(c_1)\big) \ge f(x)$$

ومنه تنتج متباينة التحدب :

$$f(x) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha).f(x_2)\ .$$

ملاحظة

إن كانت الدالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال وكانت مشتقتها الثانية دالة موجبة فإن الدالة محدبة. ذلك أن إيجابية "f تؤدي إلى تزايد الدالة المشتقة 'f. وفي هذه الحالة يأتي تحدب f من النظرية السابقة.

مراجع

1. **عبد الرحمن جعدان ، أبو بكر خالد سعد الله :** الحساب التفاضلي في الفضاءات الشعاعية النظيمية، ديوان المطبوعات الجامعية، 1990.

2. **قادة علاب :** عناصر من التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، 1991.

3. **محمد القويز ، صالح السنوسي :** مبادئ التحليل الحقيقي، الجزء 1، الرياض، 2002.

Annabi et al.: Cours d'analyse, 1ère année, Pub. Assoc. Tunisienne Sci. Mathématiques, Tunis, 1983.

Medjadi D.E. et al.: Analyse mathématique, Fonctions d'une variable réelle, Vol. 1, O.P.U. Alger, 2001.