الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE HADJ LAKHDAR

BATNA (ALGERIE)

THESE

Présentée à la Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Mathématique

Par

ABDELMOUMENE TIAIBA

THEME

LES OPERATEURS SOUS LINEAIRES Lp-SOMMANTS VERSION COMMUTATIVE ET NON COMMUTATIVE

Soutenue le : 29/11/2006

Devant le jury d'examen

Mr. S. REBIAI	Prof.	Université de Batna	Président
Mr. L. MEZRAG	M.C.	Université de M'sila	Directeur de thèse
Mr. A. AIBECHE	Prof.	Université de Sétif	Examinateur
Mr. K. MESSOUDI	Prof.	Université Batna	Examinateur
Mr. M. MORSLI	Prof.	Université de Tizi ouazou	Examinateur

Table des matières

0.1 **Introduction** 3

1 Espace de Riesz et opérateurs sous linéaires **8**

1.1 Espaces de Riesz 9

1.2 Espaces de Köthe 16

1.3 Les opérateurs sous-linéaires 19

1.4 Propriétés 21

1.5 Extension du théorème de Hahn-Banach aux opérateurs sous-linéaires . . 27

1.6 Relations entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires . . 29

1.7 Opérateurs quasi-linéaires 30

1.8 L'opérateur adjoint d'un opérateur sous-linéaire 31

1.9 Relations entre T et T^* 34

2 Les opérateurs sous-linéaires qui se factorisent par $\mathbf{L}_p$ **38**

2.1 Introduction 39

2.2 Préliminaires 41

2.3 Opérateurs sous linéaires p-convexes, q-concaves 48

2.4 Factorisation des opérateurs sous-linéaires de X dans L_p par L_q 50

2.5 Factorisation des opérateurs sous-linéaires de L_q dans X par L_p (problème transposé). 56

3 Les opérateurs sous-linéaires fortement p-sommants **59**

3.1 Introduction 60
3.2 Rappels de quelques terminologies 61
3.3 Opérateurs sous-linéaires positivement p-sommants 64
3.4 Extension du théorème de Pietsch aux opérateurs positifs 68
3.5 Opérateurs sous-linéaires fortement $p-$sommants 70
3.6 La relation entre les opérateurs linéaires et sous-linéaires 78

4 Les opérateurs sous-linéaires fortement l_p-sommants non-commutatifs 81
4.1 Introduction 82
4.2 Espace des opérateurs 83
4.3 Opérateurs l_p-sommants cas non-commutatif 88
4.4 Opérateurs fortement l_p-sommants cas non commutatifs. 96
4.5 Conclusion 103

0.1 Introduction

Les applications sous-linéaires ont été un objet mathématique très étudiées au cours ces dernières années et surtout dans le domaine de l'interpolation et des factorisations sous toutes les formes. Très récemment Grafakos, Defant, Garcia Cureva et Cie ont donné un développement importent à cette notion. Dans cette thèse, on va s'intéresser aux opérateurs sous linéaires T et les opérateurs linéaires $\leq T$. On essayera d'introduire, de comparer et de généraliser des résultats classiques ou universels du linéaires au sous-linéaires.

Les travaux de cette thèse se situent dans le cadre de la géométrie des espaces de Banach. Il porte sur la sommabilité des opérateurs sous linéaires dans tous ces aspects et la factorisation de ses mêmes opérateurs par les espaces L_p. Deux concepts entièrement liés l'un à l'autre.

Ce travail se divise en quatre parties. Dans la première partie, on étudie une tentation de construction d'opérateurs sous-linéaires adjoints. Dans la deuxième partie on étudie quelques factorisations pour les opérateurs sous linéaires à valeurs dans un L_p par L_q et quelques problèmes relationnels avec les opérateurs linéaires. Puis, on introduira une nouvelle catégorie d'opérateurs. Il s'agit des opérateurs sous-linéaires fortement $p-$sommants. On donnera un analogue au théorème de domination de Pietsch. La dernière partie concerne la généralisation de la précédente partie au cas non commutatif.

Dans le premier chapitre on donnera dans un premier temps un aperçu général sur les espaces Riesz, Banach réticulés et Banach quasi-réticulés. Puis on étudiera les opérateurs sous-linéaires et quelques propriétés qui s'y ramènent, telle que l'extension du théorème de Hahn-Banach aux opérateurs sous-linéaires. On donnera aussi quelques résultats relatifs à cette classe d'opérateurs. Dans le second, qui est le premier objectif de la thèse, est d'étudié le problème qui consiste à définir l'opérateur adjoint d'un opérateur sous-linéaire. Notre travail concernera que les opérateurs sous-linéaires T de X un espace Banach réticulé concret dans Y un espace de Banach complètement réticulé. Les propriétés qu'on

va annoncer seront proches de celles des opérateurs sous-linéaires.

Les travaux du deuxième chapitre se situent dans le cadre du développement de quelques théorèmes de factorisations dans le cas sous linéaire. Nombreux problèmes en analyse commutatif passent par le principe de factorisations, par exemple les opérateurs sommants dans toutes ses dimensions. Les études consacrées à ce domaine ont donné lieu à une littérature riche et vaste qu'on citera au fur et à mesure dans notre travail. Grothendieck a établi dans [Gro56] que tout opérateur linéaire continu d'un espace $L_\infty(S,\lambda)$ dans un espace $L_1(\Omega,\mu)$ admet la factorisation

$$L_\infty(S,\lambda) \xrightarrow{\widetilde{u}} L_2(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L_1(\Omega,\mu)$$

où $\widetilde{u}$ est un opérateur linéaire continu et T_g l'opérateur de multiplication par une fonction $g \in L_2(\Omega,\mu)$.
Dans la même direction, E. M. Nikishin a montré dans [Nik70] que tout opérateur linéaire continu d'un espace de Banach X dans un espace $L_0(\Omega,\mu)$ ((Ω,μ) espace de probabilité) admet la factorisation

$$X \xrightarrow{\widetilde{u}} L_p(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L_0(\Omega,\mu)$$

où $\widetilde{u}$ est un opérateur linéaire continu, T_g l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable g et $0 < p < 1$.
Dans sa thèse [Mau74], B. Maurey a donné une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur $u : X \longrightarrow L_p(\Omega,\mu)$($(\Omega,\mu)$ un espace mesuré quelconque) admette la factorisation

$$X \xrightarrow{\widetilde{u}} L_q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L_p(\Omega,\mu)$$

où $\widetilde{u}$ est un opérateur linéaire continu, T_g l'opérateur linéaire de multiplication par une fonction $g \in L_r(\Omega,\mu)$ et p,q,r tels que $0 < p \leq q \leq \infty$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$.

L. Mezrag a supprimé dans [Mez85] l'hypothèse d'approximation métrique sur l'espace X des théorèmes de B. Maurey et les a généralisé dans [Mez04] pour les opérateurs de cotypes finis.

Dans [Pis86] , G. Pisier s'est attaqué à un problème plus général et a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur linéaire borné $u : X \longrightarrow L_r(\Omega, \mu)((\Omega, \mu)$ un espace mesuré quelconque) se factorise par $L_{p\infty}(\Omega, \nu)$, $0 < r < p < \infty$. Il a traité aussi le problème dual (i.e., la factorisation des opérateurs linéaires de $L_s(S, \lambda)$ dans un espace de Banach Y par $L_{q1}(S, \nu)$, pour $1 \leq q < s < \infty$).

Dans [AM02] D. Achour et L. Mezrag ont généralisé les théorèmes de factorisations des opérateurs linéaires d'un Banach X à valeurs dans L_r par $L_{p\infty}$ qui ont été fait par Pisier [Pis86], aux opérateurs sous-linéaires.

On va traiter dans ce chapitre la généralisation du théorème de factorisation de Maurey aux cas des opérateurs sous-linéaires. Par une toute autre méthode, A. Defant dans [Def01] a généralisé ce type de factorisations aux opérateurs homogènes. Nous vous référons à [MT04] pour ce résultat. Donc, on étudiera l'équivalence suivante qui est notre résultat principal.

Soit $0 < p \leq q \leq \infty$. Soit $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$ un opérateur sous-linéaire continu.

$$\forall u \in \nabla T,\ u \text{ se factorise par } L_q(\Omega, \mu) \Longleftrightarrow T \text{ se factorise par } L_q(\Omega, \mu)$$

où $\nabla T = \{\text{opérateurs linéaires } u : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu) \text{ tels que } u \leq T\}$.

Ainsi on établira une condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence citée ci dessus aura une réponse positive. Autrement dit, nous démontrons que, si u est un opérateur linéaire $q-$convexe pour tout u dans ∇T et $C_{pq}(u)$ (la constante de la $q-$convexité de u) est uniformément borné, l'équivalence comme mentionnée dans le résumé de ce chapitre sera vérifiée et ceci sous la supposition que l'ensemble $\{g_u\}$ pour u dans ∇T est latticiellement borné. Sans cette condition l'équivalence est fausse. Nous donnerons un contre exemple pour montrer l'invalidité de cette équivalence. On termine ce chapitre par une étude du problème dual i.e., donner des conditions nécessaires et suffisantes de factorisation des opérateurs sous-linéaires continus d'un espace $L_q(\Omega, \mu)$ dans un espace de

Banach complètement réticulé X par $L_p(\Omega, \mu)$ avec les mêmes conditions sur les nombres réels p, q.

Le troisième chapitre sera consacré au théorème de domination pour les opérateurs fortement $p-$sommant. Pietsch a montré dans [Pie67] que l'identité de l_1 dans l_2 est $2-$absolument sommant mais l'opérateur adjoint n'est pas $2-$absolument sommant. Pour cela, le concept des opérateurs linéaires fortement $p-$sommants $(1 \leq p < \infty)$ a été introduit par J. S. Cohen [Coh73] comme une caractérisation du conjugué d'un opérateur linéaire absolument p^*-sommant (p^* est le conjugué de p, i.e., $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = 1$). Un opérateur linéaire u entre deux espaces de Banach X et Y est fortement $p-$sommant pour $(1 < p < \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{1 \leq i \leq n} \|(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y}(\sum_{1 \leq i \leq n} |\langle y_i^*, y) \rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.$$

La petite constante C qui vérifiant l'inégalité précédente est notée par $d_p(u)$, qui est une norme dans $\mathcal{D}_p(X, Y)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires fortement $p-$sommants entre deux espaces de Banach X et Y. On a $\mathcal{D}_1(X, Y) = B(X, Y)$, l'espace vectoriel de tout les opérateurs linéaires bornés de X dans Y.

On va généraliser dans ce chapitre la notion précédente aux opérateurs sous-linéaires et on donnera un analogue au théorème de domination de Pietsch pour cette catégorie. Ce théorème est l'un des principaux résultats de ce chapitre. Cohen a déduit le théorème de domination au cas linéaire simplement à partir de l'opérateur adjoint qui est p^*-sommant. Ce n'est pas le cas pour les opérateurs sous-linéaires car l'adjoint d'un opérateur sous-linéaire n'est encore bien dévloppé. On va le démontrer directement en utilisant le lemme de Ky Fan. On terminera ce chapitre par une étude relationnelle pour cette notion entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

Le quatrième chapitre se situe dans le cadre de la théorie récente des espaces d'opérateurs (où les espaces de Banach non-commutatifs) développée par [Ble92a] [Ble92b] [BP91] [ER88] [ER91] [ER93] [Pis96] [Rua88] et [Pis98], opérateur borné a été remplacé

par opérateur complètement borné, isomorphe par complètement isomorphe et espace de Banach par espace d'opérateurs (ou encore espaces de Banach quantiques). Précisément, on regarde dans cette nouvelle catégorie d'espaces tout espace de Banach comme étant un sous espace fermé de $B(H)$ pour un certain espace de Hilbert H ($B(H)$ est l'espace de Banach de tous les opérateurs bornés de H dans lui même muni de la norme forte) qui est non-commutatif, au lieu de le voir comme un sous espace d'un $C(K)$ (l'espace de toutes les fonctions continues sur le compact K) qui est commutatif. La caractérisation abstraite donnée par Ruan dans [Rua88] a signé la date de départ de cette théorie. Dans [Pis96], Pisier a construit l'espace de Hilbert d'opérateurs OH (i.e., l'unique espace vérifiant $\overline{OH^\star} = OH$ complètement isométriquement comme dans le cas des espaces de Banach classiques parce qu' il existe beaucoup d'espaces de Hilbert dans cette nouvelle catégorie qui sont infiniment loin l'un de l'autre, en d'autres termes il n'existe pas d'isomorphie complète entre eux) et a généralisé dans [Pis98] (aussi Junge) la notion d'opérateurs $p-$sommants au cas non-commutatif.
On va généraliser dans ce chapitre la notion d'opérateurs sous-linéaires p-sommants aux opérateurs sous-linéaires l_p-sommants (i.e., généraliser cette notion au cas non-commutatif). Ainsi le théorème de domination de Pietsch aux opérateurs sous-linéaires l_p-sommants cas non commutatif. On termine ce chapitre par un deuxième résultat où on généralisera la notion d'opérateurs sous-linéaires fortement $p-$sommants au cas non commutatif. On donnera aussi le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs sous-linéaires fortement l_p-sommants cas non commutatif.

On conclut ce travail par récapituler tous les problèmes qui s'y ramènent à ce travail.

On a voulu aussi pour l'aisance du lecteur rappeler en répétant dans chaque chapitre les définitions essentielles et cela dans le souci de l'indépendance des chapitres afin de faciliter la compréhension.

Chapitre 1

Espace de Riesz et opérateurs sous linéaires

1.1 Espaces de Riesz

Dans cette section on donne quelques définitions, propriétés et notations concernant les espaces de Riesz. Pour plus de détails voir [Zaa97].

Définition I.1.1

Un espace vectoriel réel X est partiellement ordonné par un ordre partiel noté par $\leq$ est un espace vectoriel ordonné (ou espace de Riesz) si

$x \leq y$ *implique* $x + z \leq y + z$ *pour tout* $z \in X$,

$x \geq 0$ *implique* $\alpha x \geq 0$ *pour tout* α *dans* $\mathbb{R}_+$.

Notations

Soit X un espace de Riesz.

1- On note par $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$. Un élément x de X est positif si $x \in X^+$. L'ensemble X^+ est appelé cône positif de X. Il vérifie les propriétés suivantes :

a)-$x \in X^+, y \in X^+$ implique $x + y \in X^+$.

b)-$x \in X^+$ implique $\alpha x \in X^+$ pour tout réel $\alpha \geq 0$.

c)-$x \in X^+$,$-x \in X^+$ implique $x = 0$.

2- La borne supérieure d'un ensemble à deux éléments est notée par $x \vee y$ ou $\sup\{x, y\}$ et la la borne inférieure d'un ensemble à deux éléments est notée par $x \Lambda y$ ou $\inf\{x, y\}$. Pour tout $x \in X$ on peut écrire $x^+ = x \vee 0$; $x^- = -x \vee 0$, donc $|x| = x^+ \vee (-x)$ et $x = x^+ - x^-$. On a aussi

a)-$0 \leq x^+ \leq |x|$ et $0 \leq x^- \leq |x|$ d'où $-x^- \leq x^- \leq x^+$.

b)-$x \leq y$ si et seulement si $x^+ \leq y^+$ et $x^- \geq y^-$.

c)-$|x| \wedge |y| = 0 \Leftrightarrow |x + y| = |x - y|$.

d)-$|x| \vee |y| = \frac{1}{2}\{|x + y| + |x - y|\}$ et $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\{|x + y| - |x - y|\}$.

Définitions I.1.2

1-a)-*Un sous ensemble A de X dit borné pour l'ordre (ou simplement borné) s'il existe un élément y dans X tel que $x \leq y$ pour tout $x \in A$ et y est alors appelé majorant de*

A.

b)-*Si A est borné, alors z est appelé la borne supérieure de A ou le supremum de A si z est une borne supérieure de A et $z \leq y$ pour tout majorant y de A.*

c)-*Un espace vectoriel partiellement ordonné X dans lequel toute paire d'éléments a une borne supérieure est appelé espace vectoriel réticulé ou de Riesz.*

d)- *On dira qu'un espace vectoriel est complètement réticulé si toute partie non vide et majorée pour l'ordre, admet un supremum.*

2- *Soit X un réticulé avec l'élément zéro 0. Le sous ensemble non vide I dans X est appelé idéal dans X si*

a)-$x \in I$ *et* $y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$.

b)-*Soit $y \in X$ et $x \in I$. Si $y \leq x \Rightarrow y \in I$.*

Exemples I.1.3

Soit $C(K)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'espace topologique compact K. L'espace $C(K)$ est partiellement ordonné par l'ordre partiel défini par $f \leq g$ ($f \leq g$ si et seulement si $f(x) \leq g(x), \forall x \in K$) L'espace $C(K)$ est un espace de Riesz. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et $M(\mathbb{R}^n, \mu)$ l'ensemble des fonctions μ-mesurables réelles dans $\mathbb{R}^n$. Nous écrivons $f \approx g$, si et seulement si, f et g différent seulement dans un ensemble de mesure nulle. On peut vérifier facilement que $\approx$ est une relation d'équivalence. Soit $L_0 = L_0(\mathbb{R}^n, \mu)$ l'ensemble des classes d'équivalences. L'ensemble L_0 est un espace vectoriel réel. Si on définit la classe d'équivalence de la fonction f par $[f]$ on a donc $[f] + [g] = [f + g]$ et $[\alpha f] = \alpha [f]$ pour tout réel α. D'où on peut prendre comme relation d'ordre $[f] \leq [g]$ si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ sauf sur les ensembles de mesure nulles. L'espace vectoriel $L_0(\mathbb{R}^n, \mu)$ est un espace de Riesz.

Remarque I.1.4 (Espace de Riesz normé)

Rappelons qu'une norme $\|.\|$ sur un espace de Riesz X est une norme réticulée si $\forall x, y \in X$, $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ (ce qui implique que pour tout $x \in X$ l'élément x et $|x|$ ont la même norme). Un espace de Riesz équipé d'une norme réticulée est appelé espace de

Riesz normé. Si la norme est complète, on dira que X est un espace de Banach réticulé (Il est complètement réticulé s'il est complètement réticulé en tant qu'espace vectoriel). Les deux inégalités suivantes sont vérifiées $\|x^+ - y^-\| \leq \|x - y\|$ et $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$.

Exemples I.1.5

L'espace $L_1([0.1], \mu)$ est un espace de Banach réticulé.

L'espace $C(K)$ est un espace de Banach réticulé. L'espace L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ est un un espace de Banach complètement réticulé.

Théorème I.1.6 ([Zaa97])

Le dual d'un espace de Riesz normé est un espace de Banach réticulé.

Nous enchainons dans cette section par introduire quelques préliminaires concernant les quasi Banach réticulés. Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut consulter [MN91].

Proposition I.1.7 ([LT96])

Le dual X^* d'un espace de Banach réticulé X est un espace de Banach complètement réticulé muni de l'ordre naturel

$$x_1^* \leq x_2^* \Longleftrightarrow \langle x_1^*, x\rangle \leq \langle x_2^*, x\rangle, \quad \forall x \in X^+ \tag{1.1}$$

où $\langle ., .\rangle$ indique le crochet de dualité.

Preuve

Nous allons esquisser la démonstration. Nous définissons le cône positif dans X^* par

$$x^\star \geq 0 \Longleftrightarrow x^*(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ dans } X.$$

Dans ce cas, il est facile de vérifier que pour tout x^*, y^* dans X^* et pour tout $x \geq 0$, on a

$$(x^* \vee y^*)(x) = \sup\{x^*(u) + y^*(x - u) : 0 \leq u \leq x\}$$

et

$$(x^* \wedge y^*)(x) = \inf\{x^*(v) + y^*(x - v) : 0 \leq v \leq x\}.$$

Pour plus de détails voir [LT96, p. 3]. ■

Remarque I.1.8

Nous désignons par un sous-lattice d'un espace de Banach réticulé X le sous espace linéaire E de X tel que pour tout $x, y \in E$, le $\sup\{x, y\}$ appartient à E. L'injection isométrique $i : X \longrightarrow X^{**}$ telle que $\langle i(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$ envoie X dans un sous-lattice de X^{**}. On pourra consulter [LT96] pour plus d'informations. Si on considère X comme un sous-lattice de X^{**} on a pour $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow \langle x_1, x^* \rangle \leq \langle x_2, x^* \rangle, \quad \forall x^* \in X^*_+. \tag{1.2}$$

Nous continuons ce paragraphe par introduire quelques notations dont nous aurons besoin par la suite.

Soit n un entier. Soit X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $X(l_p^n)$ l'espace des suites $x = (x_1, ..., x_n)$ d'éléments de X telles que

$$\|x\|_{X\left(l_p^n\right)} = \left\| (\sum_1^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right\| \text{ si } 1 \leq p < \infty \tag{1.3}$$

et

$$\|x\|_{X(l_\infty^n)} = \left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right\| \text{ si } p = \infty. \tag{1.4}$$

L'espace $X(l_p^n)$ équipé de l'ordre naturel

$$x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i, \quad \forall i,$$

est un espace de Banach réticulé.

Soit maintenant X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites (x_i) dans X muni de la norme

$$\|(x_i)\|_{l_p(X)} = (\sum_1^\infty \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$(\text{resp. } \|(x_n)\|_{l_p^n(X)} = (\sum_1^n \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}})$$

si p est fini, et on prend le sup si p est infini.

On désigne aussi par $l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{n\ \omega}(X)$) l'espace des suites (x_i) dans X muni de la norme

$$\|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^\star}} (\sum_1^\infty |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}})$$
$$(\text{resp. } \|(x_n)\|_{l_p^{n\ \omega}(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^\star}} (\sum_1^n |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}).$$

On sait (voir [DJT95]) que $l_p(X) = l_p^\omega(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$, si et seulement si, $dim(X)$ est finie. Si $p = \infty$, on a $l_\infty(X) = l_\infty^\omega(X)$. On a aussi si $1 < p \leq \infty$, $l_p^\omega(X) \equiv B(l_{p^*}, X)$ isométriquement et $l_1^\omega(X) \equiv B(c_O, X)$ isométriquement (où p^* est le conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$). En d'autres termes, soit $v : l_{p^*} \longrightarrow X$ un opérateur linéaire tel que $v(e_i) = x_i$ (i.e., $v = \sum_1^\infty e_j \otimes x_j$, (e_j) est la base canonique de l_p). Alors,

$$\|v\| = \|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)}. \tag{1.5}$$

Soit E un espace de Banach et X est un espace de Banach complètement réticulé. Un opérateur $u \in B(E, X)$ est dit borné pour l'ordre (voir [Nie73] et [HON81]) si $u(B_X)$ est borné pour l'ordre dans X (B_X est la boule unité de X). Dans ce cas, on pose

$$l(u) = \left\| \sup_{x \in B_X} |u(x)| \right\|.$$

On pourra montrer (voir [LJ80] ou [Szu85]) que l est une norme sur $l(E, X)$, l'espace de tous les opérateurs bornés pour l'ordre de E dans X.

Si $w : X \longrightarrow Y$, Y un espace de Banach complètement réticulé et w un opérateur positif (i.e. $w(x) \geq 0$, pour tout x dans X^+). Alors, wu est borné pour l'ordre.

Proposition I.1.9

Soit X un espace de Banach réticulé. Soit l'opérateur linéaire $v : l^n_{p^*} \longrightarrow X$ tel que $v(e_i) = x_i$ $(1 \leq p \leq \infty)$. On a

$$l(v) = \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{X\left(l^n_p\right)}. \tag{1.6}$$

Preuve

On a d'après Krivine [Kri73]

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} &= \sup\{\left|\sum_1^n \lambda_i x_i\right| : \sum_1^n |\lambda_i|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} = 1\}, \\
&= \sup\{\left|\sum_1^n \lambda_i v(e_i)\right| : \sum_1^n |\lambda_i|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} = 1\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\right\| &= \left\|\sup\{\left|v(\sum_1^n \lambda_i e_i)\right| : \sum_1^n |\lambda_i|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} = 1\}\right\|, \\
&= \|\sup\{|v(x)| : \|x\| = 1\}\|.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition I.1.10

Soit K un compact. Soit l'opérateur linéaire $v : l^n_{p^*} \longrightarrow C(K)$ tel que $v(e_i) = x_i$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Alors on a

$$l(v) = \|v\|.$$

Preuve

On a d'après (1.5)

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sup\{(\sum_1^n |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}; \xi \in B_{X^*}\} \\ &= \sup\{(\sum_1^n |x_i(t)|^p)^{\frac{1}{p}}, t \in K\} \\ &= \left\|(\sum_1^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_{C(K)}.\end{aligned}$$

D'ou la proposition. ■

Définition I.1.11

Une quasi-norme sur un espace vectoriel réel X est une fonction $x \longrightarrow \|x\|$ de X dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie

(a) $\|x\| > 0$ *pour tout* $x \neq 0$.

(b) $\|tx\| = |t|\,\|x\|$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in X$.

(c) $\exists C_X \geq 1$ *telle que* $\|x+y\| \leq C_X(\|x\| + \|y\|)$ *pour tout* $x, y \in X$.

La constante C_X est appelée le module de concavité de la quasi-norme $\|.\|$ (si =1 c'est la définition de la norme habituelle).

Définition I.1.12

Un quasi-Banach réel est un espace vectoriel réel maîtrisable et complet dont la topologie est donnée par une quasi-norme. Si, de plus X est réticulé (resp. complètement réticulé) et $\|x\| \leq \|y\|$ quand $|x| \leq |y|$, on dira que X est un quasi-Banach réticulé (resp. quasi-Banach complètement réticulé). Notons que ceci implique que pour tout $x \in X$ les éléments x et $|x|$ ont la même quasi-norme. Pour plus de détails voir [Zaa97] *et* [LT96].

Remarque I.1.13

Si (c) est remplacée par $(c)'$ $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ pour tout $x, y \in X$ et pour un p fixé dans $]0,1]$, alors $\|.\|$ est dite une $p-$norme sur X. Notons que la $1-$norme est la norme usuelle. Un espace de Banach quasi-normé est isomorphe à un espace de Banach si et seulement si, il est localement convexe. Tout $p-$normé est un espace quasi-normé avec $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$. Aussi, pour tout quasi- Banach X il existe $0 < p < 1$ et une équivalente $p-$norme satisfaisant

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$$

pour tout $x, y \in X$.

Si $|||.|||$ dénote la quasi-norme originale sur X avec la constante C dans l'inégalité quasi-triangulaire, alors la $p-$norme ($C = 2^{\frac{1}{p}-1}$) peut être définie comme suit

$$\|x\| = \inf\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} |||x_i|||^p\right)^{\frac{1}{p}} : n > 0, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}. \tag{1.7}$$

Cette assertion est dûe à Aoki et Rolewicz (voir [KPR84]).

1.2 Espaces de Köthe

Dans cette section on introduit quelques terminologies concernant les (quasi-) Banach réticulés et les (quasi-) espaces de Köthe. Pour plus de détails, on pourra consulter les références [Def01] , [LT96] , [MN91] et [Zaa97].

Définition I.2.1

Un espace (quasi-) Banach réticulé X est continûement ordonné (resp. $\sigma-$continment ordonné) si, tout ensemble filtrant décroissant (resp. suite $(x_i)_{i\in I}$ dans X) si $\inf_{i\in I} x_i = 0, \quad (\lim_i \|x_i\| = 0)$.

Proposition I.2.2 ([LT96, Proposition 1.a.8])

Soit X un espace de Banach réticulé. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) *L'espace X est $\sigma-$ complètement ordonné et $\sigma-$ Continûment ordonné .*

b) *Toute suite croissante ordonnée et bornée dans X converge fortement dans X.*

c) *L'espace X est Continûment ordonné.*

d) *L'espace X est complètement ordonné et continûment ordonné.*

Définition I.2.3

Soient (Ω, Σ, μ) un espace de mesure complet et $\sigma-$finie. Un espace (quasi-) Banach $X \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$ formé par les fonctions localement intégrables, est dit espace de (quasi-) Köthe s'il vérifie les conditions suivantes :

(a) *Si $|f| \leq |g| \quad \mu - p.p$ dans Ω, avec $f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$ et $g \in X$, Alors, $f \in X$ et $\|f\| \leq \|g\|$.*

(b) *Il existe $0 < t < \infty$ tel que pour tout $x, y \in X$,*

$$\left\| (|x|^t + |y|^t)^{\frac{1}{t}} \right\|_X \leq (\|x\|^t + \|y\|^t)^{\frac{1}{t}}.$$

(c) *Pour tout $A \in \Sigma$ avec $\mu(A) < \infty$ les fonctions de caractèrisations χ_A de A appartient à X.*

Remarque I.2.4

Dans la condition **(b)** si $t = 1$, X est un espace de Köthe. Tout espace de Köthe est un Banach réticulé pour l'ordre ($f \geq g$ si et seulement si $f(\omega) \geq g(\omega) \quad \mu - a.e.$). Cet ordre est $\sigma-$ complètement ordonné. Par exemples les L_p, les espaces Lorentz $L_{p,q}$ et les espaces de Orlicz sur Ω sont des espaces de Köthe. En général $C(K)$ n'est pas un espace de (quasi) Köthe.

Pour plus d'informations sur les définitions suivantes voir [Def01].

Définition I.2.5

Un espace Köthe X est dit $\sigma-$continûment ordonné si

$$f_n \in X : \quad 0 \leq f_n \searrow 0 \quad \mu - a.e. \quad alors \ \|f_n\|_X \searrow 0.$$

Définition I.2.6

L'espace dual X' d'un espace de Köthe X est l'espace de toutes les fonctions $g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$ telles que

$$f.g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R}).$$

L'espace X' muni de la norme induite par celle de X^*

$$\|g\|_{X'} = \sup_{\|f\|_X=1} \left|\int_\Omega f(\omega)\, g(\omega)\, d\mu(\omega)\right|$$

est un espace de Köthe. On peut regarder l'espace X' comme un sous espace fermé de l'espace X^* (X' est un idéal de X^*).

On a aussi, X est $\sigma-$ continûment ordonné si et seulement si, $X' = X^*$.

On dira que X vérifie la propriété de Fatou si pour $x_n, x \in X_+$ tels que $x_n \nearrow x \quad \mu-a.e.$, alors $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$.

X' "*is a norming*" sous espace de X^*, si,

$$\|x\|_X = \sup_{\|x^*\|_{X'}=1} |\langle x^*, x\rangle|$$

pour tout x dans X.

Après les définitions précédentes, on peut annoncer la propriété suivante : l'espace X' est un sous espace " *norming*" de X^* si et seulement si, X satisfait la propriété de Fatou.

Les théorèmes suivants établirent le lien entre les espaces de Banach réticulés abstraîts et les espaces de Banach concrets qui sont les espaces de Köthe.

Théorème I.2.7 ([Def01])

Soit X un espace Banach réticulé continûment ordonné à une unité faible. Alors, il existe un espace de probabilité (Ω, Σ, μ), un idéal $\widetilde{X}$ de $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ et une norme latticielle $\|.\|_{\widetilde{X}}$ tels que

- **(a)** *L'espace X est isométrique (en respectant l'ordre) à $\left(\widetilde{X}, \|.\|_{\widetilde{X}}\right)$.*
- **(b)** *L'espace $\widetilde{X}$ est dense dans $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ et $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ est dense dans $\widetilde{X}$.*
- **(c)** $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\widetilde{X}} \leq \|f\|_\infty, \forall f \in L_\infty$.
- **(d)** *Le dual de l'isométrie porté dans **(a)** est tracer dans le Banach réticulé.*

Un espace de Köthe (qui est un espace de Banach réticulé formé par des fonctions mesurables) est un espace de Banach réticulé abstraît et d'après le théorème précédent

un espace de Banach réticulé abstraît (avec une unité faible et continûment ordonnée) est isomorphe comme un espace de Banach et comme un lattice, à un espace de Köthe. Ainsi un espace de Banach réticulé abstraît peut être considéré comme un espace de Köthe sur un espace de probabilité. Dans la suite et pour simplifier notre travail, on peut prendre les Banach réticulés comme des classes d'équivalences de fonctions mesurables et localement intégrables dans (Ω, Σ, μ) un espace de mesure complet et $\sigma-$fini.

1.3 Les opérateurs sous-linéaires

Dans cette section on étudiera la classe des opérateurs sous-linéaires qui sont positivement homogènes et sous additives en donnant brièvement quelques propriétés. Nous référons à [BM01] et [MT04] pour plus de détails.

Définition I.3.1

Soit T une application d'un espace vectoriel X dans un espace réticulé Y. On dira que T est sous linéaire si,

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X \qquad T(\lambda x) \quad = \quad \lambda T(x),$

(2) $\forall x \in X,\ \forall y \in X \qquad T(x+y) \quad \leq \quad T(x) + T(y).$

La somme de deux opérateurs sous-linéaires est un opérateur sous-linéaire et la multiplication par un nombre positif donne aussi un opérateur sous-linéaire.

Exemples I.3.2

1) Tout opérateur linéaire est un opérateur sous-linéaire.

2) Soit u une application linéaire d'un espace de Banach X dans l'espace $L_0(\Omega, \mu)$ qu'est l'espace des fonctions mesurables sur Ω ((Ω, μ) un espace mesuré). On pose $T(x)(\omega) = |u(x)(\omega)|$, alors T est un opérateur sous-linéaire. Plus généralement, soit Y un espace de Banach. On définit $L_0(\Omega, \mu, Y)$ par

$$L_0(\Omega, \mu, Y) = \{f : \Omega \longrightarrow Y \text{ telle que } \|f(\omega)\|_Y \in L_0\}.$$

Si $u : X \to L_0(Y)$.un opérateur linéaire, alors $T(x) = \|u(x)\|_Y$ est un opérateur sous-linéaire.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n : X \to L_0(\Omega, \mu)$ une suite d'opérateurs linéaires. Alors

$$M(x)(\omega) = \max_n |u_n(x)(\omega)|$$

et

$$Q(x)(\omega) = (\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)(\omega)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

sont des opérateurs sous-linéaires.

Soit X un espace vectoriel et Y un espace réticulé. On note par

$$L(X, Y) = \{\text{applications linéaires} \quad u : X \longrightarrow Y\}$$

et on dira si X est réticulé, que u est positive si $u(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0$

$$SL(X, Y) = \{\text{applications sous-linéaires} \quad T : X \longrightarrow Y \ \}$$

et on le munit de l'ordre induit par Y

$$T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x), \quad \forall x \in X \tag{1.8}$$

et

$$SL(X, Y) = \{\text{applications sous-linéaires} \quad T : X \longrightarrow Y \ \}.$$

qui est un cône convexe.

Comme conséquence immédiate

$$u \leq T \Longleftrightarrow -T(-x) \leq u(x) \leq T(x), \quad \forall x \in X \tag{1.9}$$

car

$$\begin{aligned} u \leq T &\iff u(x) \leq T(x), \qquad \forall x \in X, \\ &\iff u(-x) \leq T(-x), \quad \forall x \in X, \\ &\iff -u(x) \leq T(-x), \quad \forall x \in X, \\ &\iff u(x) \geq -T(-x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Définition I.3.3

Soit $T \in SL(X,Y)$. On dira que T est symétrique si pour tout x dans X, $T(x) = T(-x)$ et si X est réticulé, T est croissant si pour tout x, y dans X

$$x \leq y \Longrightarrow T(x) \leq T(y).$$

Remarques I.3.4

1) Soit T un opérateur sous linéaire symétrique entre espaces réticulés X et Y. Alors, $T \geq 0$ au sens de (1.5). En effet, soit x dans X

$$\begin{aligned} 0 &= T(x-x) \\ &\leq T(x) + T(-x) \\ &\leq T(x) + T(x) \\ &\leq 2T(x). \end{aligned}$$

La réciproque est fausse même si T est croissant.

2) On sait aussi que la symétrie n'entraîne pas la croissance.

1.4 Propriétés

Nous donnerons dans ce paragraphe quelques propriétés que nous aurons besoin pour la suite de notre travail.

Proposition I.4.1

Soient X, Y deux espaces vectoriels dont Y réticulé et T dans $SL(X,Y)$. Alors,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ \lambda T(x) \leq T(\lambda x). \tag{1.10}$$

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x \in X$.

Si $\lambda > 0$ on a

$$\lambda T(x) = T(\lambda x) \leq T(\lambda x),$$

si $\lambda < 0$, on a

$$\lambda T(x) = -(-\lambda T(x)) = -T(-\lambda x)$$

et

$$T(\lambda x - \lambda x) = 0 \leq T(-\lambda x) + T(\lambda x) \Rightarrow -T(-\lambda x) \leq T(\lambda x)$$

donc, en combinant les deux quantités précédentes on aura

$$\lambda T(x) \leq T(\lambda x).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition I.4.2

Soient X, Y et Z, trois espaces vectoriels dont Y et Z réticulés.

(a) $\forall T \in SL(X,Y)$ *et* $\forall u \in L(Y,Z)$ *(positif)* $\Longrightarrow uoT \in SL(X,Z)$.

(b) $\forall u \in L(X,Y)$ *et* $\forall T \in SL(Y,Z) \Longrightarrow Tou \in SL(X,Z)$.

(c) $\forall T \in SL(X,Y)$ et $\forall S \in SL(Y,Z)$ *(croissant)* $\Longrightarrow SoT \in SL(X,Z)$.

Preuve

Si u est un opérateur linéaire positif, alors u est croissant. (et réciproquement). En effet, soit u un opérateur linéaire positif ; x, y dans X tel que $x \geq y$. On a

$$x - y \geq 0 \Rightarrow u(x-y) \geq 0$$

puisque

$$u(x-y) = u(x) - u(y) \geq 0 \Rightarrow u(x) \geq u(y).$$

Donc u est croissant.

(a) Soient x, y dans X. Alors,

$$\begin{aligned} uoT(x+y) &= u(T(x+y)), \\ &\leq u(T(x)+T(y)) \text{ (car } u \text{ est positif)}, \\ &\leq uoT(x) + uoT(y). \end{aligned}$$

Soit λ dans $\mathbb{R}^+$ et x dans X

$$\begin{aligned} uoT(\lambda x) = u(T(\lambda x)) &= u(\lambda T(x)), \\ &= \lambda(uoT)(x). \end{aligned}$$

Donc

$$uoT \in SL(X, Z).$$

(b) Soient x, y dans X

$$\begin{aligned} Tou(x+y) &= T(u(x+y)) \\ &= T(u(x)+u(y)) \\ &\leq Tou(x) + Tou(y) \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $x \in X$

$$Tou(\lambda x) = T(\lambda u(x)) = \lambda Tou(x).$$

Donc

$$Tou \in SL(X, Z).$$

(c) Pareil que **(b)**.

Ainsi s'achève la démonstration. ■

Proposition I.4.3

Soit T un opérateur sous-linéaire d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé Y. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(**1**) *T continu,*

(**2**) *T continu en 0,*

(**3**) *Il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in X, \ \|T(x)\| \leq C \|x\|$.*

Dans ce cas, T est borné et on pose

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \left\{ \|T(x)\| : \|x\|_{B_X} = 1 \right\}. \tag{1.11}$$

Preuve

(**1**) $\Rightarrow$ (**2**). Evidente.

(**2**) $\Rightarrow$ (**3**). Soit T un opérateur sous-linéaire continu en 0, donc

$$\exists \eta > 0 : \forall x (\neq 0) \in X, \|x\| \leq \eta \Rightarrow \|T(x)\| \leq 1.$$

Posant $y = \dfrac{x}{\|x\|}\eta$. Alors

$$\|T(y)\| \leq 1$$

donc

$$\|T(x)\| \leq \frac{1}{\eta} \|x\|$$

d'où (3).

(3) $\Rightarrow$ (1) Supposons qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in X,\ \|T(x)\| \leq C\,\|x\|\,.$$

Soit x_0 dans X. On a

$$T(x) = T(x + x_0 - x_0) \leq T(x - x_0) + T(x_0) \Rightarrow T(x) - T(x_0) \leq T(x - x_0).$$

et

$$T(x_0) = T(x_0 - x + x) \leq T(x_0 - x) + T(x) \Rightarrow T(x_0) - T(x) \leq T(x_0 - x).$$

Donc pour tout x dans X on a

$$\begin{aligned} |T(x) - T(x_0)| &\leq \sup\{T(x - x_0), T(x_0 - x)\} \\ &\leq |T(x - x_0)| + |T(x_0 - x)| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \||T(x) - T(x_0)|\| &= \|T(x) - T(x_0)\| \\ &\leq \|T(x - x_0)\| + \|T(x_0 - x)\| \\ &\leq 2C\,\|x - x_0\|\,. \end{aligned}$$

Donc T est continu. ■

On note par

$$SB(X, Y) = \{\ T : X \longrightarrow Y \text{ sous-linéaires bornés}\}$$

et

$$B(X,Y) = \{\, u : X \longrightarrow Y \text{ linéaires bornés}\}.$$

Proposition I.4.4

Soit T un opérateur sous-linéaire borné entre X un espace de Banach et Y un espace de Banach réticulé.

(1) *Pour tout x dans X, on pose*

$$\varphi(x) = \sup\{T(x),\ T(-x)\}\,.$$

Alors, φ est un opérateur sous-linéaire symétrique. De plus,

$$|T| \leq \varphi \quad et \quad \|\varphi(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|\,.$$

(2) *Pour tout $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, on a*

$$T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\, \varphi(x_i).$$

De plus

$$\left\| T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\, \|\varphi(x)\|\,.$$

Preuve

(1) Il est claire que φ est un opérateur sous-linéaire symétrique, donc d'après la remarque I.3.4 φ est positif.

Soit x dans X. On a,

$$\begin{aligned} |T(x)| &= \sup\{T(x), -T(x)\}\,, \\ &\leq \sup\{T(x), T(-x)\} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Concernant l'égalité des normes on a,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| \leq \|\varphi(x)\| &= \|\sup\{T(x), T(-x)\}\|\,, \\ &\leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|\,. \end{aligned}$$

(2) Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, en écrit $\alpha_i = \alpha_i^+ - \alpha_i^-$ tels que $\alpha_i^+, \alpha_i^- \in \mathbb{R}^+$, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i) &= T(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^+ - \alpha_i^-)x_i),\\
&\leq T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^+ x_i) + T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^-(-x_i)),\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^+ T(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^- T(-x_i),\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^+ + \alpha_i^-)\sup\{T(x), T(-x)\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\,\varphi(x_i).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$-T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i) \leq T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(-x_i)) \leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\,\varphi(x_i),$$

donc

$$\left|T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\,\varphi(x_i).$$

En prenant la norme des deux côtés, on obtient

$$\left\|T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\,\|\varphi(x_i)\|\,.$$

D'où la proposition. ■

1.5 Extension du théorème de Hahn-Banach aux opérateurs sous-linéaires

Nous donnons le théorème de Hahn-Banach généralisé aux opérateurs sous-linéaires. Nous aurons bien besoin. Pour la démonstration on trouvera une dans [Zaa 97, p. 244].

Théorème I.5.1 (théorème de Hahn-Banach)
Soient X, Y deux espaces vectoriels dont Y complètement réticulé, $T \in SL(X,Y)$ et X_0 un sous-espace vectoriel de X. Soit u dans $L(X_0, Y)$ tel que $u \leq T$. Alors, u se prolonge en un opérateur linéaire $\widetilde{u} \in L(X,Y)$ tel que $\widetilde{u} \leq T$.

Comme corollaire immédiat.

Corollaire I.5.2

Soient X, Y deux espaces vectoriels dont Y complètement réticulé. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire. Alors,
pour tout x dans X il existe $u_x \in \nabla T$ tel que

$$T(x) = u_x(x) \ \ (ie., \ T(x) = \sup_{u \in \nabla T} u(x)\,). \tag{1.12}$$

Preuve

Soit x dans X. On pose

$$\begin{array}{rccl} u_x : & \mathbb{R}x & \longrightarrow & Y \\ & \lambda x & \longmapsto & u_x(\lambda x) = \lambda T(x) \end{array}$$

l'opérateur u_x est linéaire sur $X_0 = \mathbb{R}x$ et $u_x(\lambda x) = \lambda T(x) \leq T(\lambda x)$ (Proposition I.4.1) donc d'après le théorème de Hahn-Banach, il se prolonge en un opérateur noté encore $u_x \in \nabla T$ et $T(x) = u_x(x)$. ■

Remarque I.5.3

On note par ∇T l'ensemble des opérateurs linéaires $u : X \longrightarrow Y$ tels que $u(x) \leq T(x)$ pour tout x dans X. On a d'après ce qui précède que ∇T est non vide si Y est un espace complètement réticulé. Si Y est simplement un réticulé. Alors, ∇T est en générale vide (voir [Lin92]).

1.6 Relations entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires

Le théorème suivant établit un lien direct entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

Théorème I.6.1 ([MT04])
Soient X, Y deux espaces de Banach dont Y complètement réticulé et $T : X \to Y$ un opérateur sous-linéaire continu. Alors,

(**a**) $\forall x \in X,\ \|T(x)\| \leq \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|$.

(**b**) $\|T\| \leq \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u\| \leq 2\,\|T\|$.

Preuve

(**a**) Soit x dans X. On a d'une part,

$$\|T(x)\| = \|u_x(x)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\|.$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \sup\{|T(x)|, |T(-x)|\}, \\ &\leq |T(x)| + |T(-x)|. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \||T(x)| + |T(-x)|\|, \\ &\leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|. \end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|.$$

(**b**) Se déduit immédiatement de (**a**). ■

Comme conséquence immédiate.

Corollaire I.6.2

(a) *T est continu $\Longleftrightarrow \forall u \in \nabla T$, u est continu.*

(b) *Aussi si T est symétrique, on aura*

$$\begin{cases} \textbf{(1)} & \|T(x)\| = \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u(x)\|, \forall x \in X. \\ \textbf{(2)} & \|T\| = \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u\|. \end{cases}$$

1.7 Opérateurs quasi-linéaires

Dans cette section, nous allons donner la définition d'opérateur quasi-linéaire et quelques remarques sur cette classe d'opérateurs. Pour plus d'informations voir [Woj91].

Définition I.7.1

Un opérateur T d'un espace de Banach X dans un (quasi-) Banach réticulé Y est dit quasi-linéaire si pour tout x, y dans X et λ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{lll} \textbf{(1)} & |T(\lambda x)| & = |\lambda| \, |T(x)|, \\ \textbf{(2)} & |T(x+y)| & \leq |T(x)| + |T(y)|. \end{array}$$

Remarques I.7.2

1)-Si on pose $\varphi(x) = |T(x)|$ alors φ est un sous-linéaire symétrique. T sous-linéaire et symétrique implique que T est quasi-linéaire.

2)-En générale la somme de deux opérateurs quasi-linéaires n'est pas un quasi-linéaires. Mais la multiplication par un scalaire est un quasi-linéaire

3)-Soit T un opérateur sous-linéaire ou quasi-linéaire d'un espace de Banach X dans un (quasi-) Banach réticulé Y. Alors, on a

l'opérateur T est continu si et seulement si il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in X$, $\|T(x)\| \leq C \|x\|$.

Dans ce cas on pose

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\|_{B_X} = 1\}.$$

On note par $SQ(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs quasi-linéaires bornés de X dans Y.

Proposition I.7.3

Soit T un opérateur quasi -linéaire d'un espace de Banach X dans un espace de a Banach complètement (quasi-) réticulé Y. Alors, pour tout x dans X il existe $u_x \in L(X,Y)$ tel que , $|T(x)| = |u_x(x)|$, (i.e., le sup est atteint, $|T(x)| = \sup\{|u(x)| : u_x \in L(X,Y), |u_x| \leq |T|\}$).

Preuve

On a $\varphi(x) = |T(x)|$ qu'est un opérateur sous-linéaire symétrique pour tout x dans X il existe $u_x \in L(X,Y)$ tel que, $|T(x)| = u_x(x)$. On a aussi $|T(-x)| = u_{-x}(-x)$ qui implique $|T(x)| = -u_{-x}(x)$ par la symétrisation de φ. On déduire que

$$|T(x)| = \sup\{|u(x)| : u_x \in L(X,Y),\ |u_x| \leq |T|\}.$$

Remarquons que

$$\|T(x)\| = \sup_{u \in \nabla|T|} \|u(x)\|. \ \blacksquare$$

1.8 L'opérateur adjoint d'un opérateur sous-linéaire

Dans cette partie on essayera de définir l'opérateur adjoint d'un opérateur sous linéaire. Notre construction concerne les opérateurs sous linéaires T de X espace de Banach réticulé concret dans Y espace de Banach complètement réticulé. A part quelques propriétés nous nous pourrons pas aller plus loin. Beaucoup d'applications sont à l'étude. Dans la suite, espace de Köthe ou de Banach réticulé de fonctions (par exemples les espaces L_p), désignera le même espace.

Proposition I.8.1

Soient X un espace de Köthe, Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur sous-linéaire borné de X dans Y. Alors, l'ensemble $\{u^*(y^*)\}_{u \in \nabla T}$ est simple-

ment borné dans X^*.

$$(i.e.,\ \forall y^* \in Y^*, \exists C_{y^*} \in X^* : \forall u \in \nabla T, \quad u^*(y^*) \leq C_{y^*}). \tag{1.13}$$

Preuve

Soit X un espace de Köthe sur $(\Omega, \Sigma, \mu, \mathbb{R})$. Supposons que $\{u^*(y^*)\}_{u \in \nabla T}$ n'est pas simplement borné dans Y^*. C'est à dire $\exists \Omega_0 \in \Sigma$ tel que $\mu(\Omega_0) > 0$ et $y^* \in Y^*$ tel que pour tout $C \in X^*$, il existe $u \in \nabla T$ et $u^*(y^*) > C$ sur Ω_0. On peut choisir C dans X^*_+. Alors, on a

$$u^*(y^*) > C \text{ sur } \Omega_0 \Longrightarrow \|u^*(y^*)\| > \|C\|$$

(car X^* est un espace de Köthe moyennant quelques propriétés). Donc

$$\|C\| < \|u^*(y^*)\| \leq \|u\| \|y^*\|.$$

Prenons

$$C = 2\|T\| \|y^*\| x^*, \quad x^* \in B_{X^*},\ x^* > 0 \text{ et } \|x^*\| = 1$$

on aura

$$2\|T\| \|y^*\| \|x^*\| < \|u\| \|y^*\|.$$

Ce implique que

$$2\|T\| < \|u\|.$$

Contradiction avec le théorème I.6.1 où $2\|T\| \geq \|u\|$, par conséquent $\{u^*(y^*)\}_{u \in \nabla T}$ est simplement borné dans X^*.

Définition I.8.2

Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur sous-linéaire borné de X dans Y. On définie T^* (adjoint de T) de Y^* dans X^* par

$$T^*(y^*) = \sup_{u \in \nabla T} u^*(y^*). \tag{1.14}$$

L'opérateur T^* est bien défini d'après la proposition I.8.1.

Proposition I.8.3

Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur sous-linéaire borné de X dans Y. Alors, T^* défini précédemment est un opérateur sous-linéaire de Y^* dans X^*.

Preuve

Soit y_1^* et y_2^* dans Y^*. On a

$$\begin{aligned} T^*(y_1^* + y_2^*) &= \sup_{u \in \nabla T} u^*(y_1^* + y_2^*) \\ &= \sup_{u \in \nabla T} (u^*(y_1^*) + u^*(y_2^*)) \\ &\leq \sup_{u \in \nabla T} u^*(y_1^*) + \sup_{u \in \nabla T} u^*(y_2^*) \\ &\leq T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*). \end{aligned}$$

Soient $\lambda > 0$ et $y \in Y^*$, on a

$$\begin{aligned} T^*(\lambda y^*) &= \sup_{u \in \nabla T} u^*(\lambda y^*) \\ &= \lambda \sup_{u \in \nabla T} u^*(y^*) \\ & \quad \lambda T^*(y^*). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarques I.8.4

1)- Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur sous-linéaire borné de X dans Y. On a naturellement

$$\nabla T^* = \{v \in L(Y^*, X^*)/v(y^*) \leq T^*(y^*)\} \tag{1.16}$$

et

$$T^*(y^*) = \sup_{v \in \nabla T^*} v(y^*). \tag{1.17}$$

2)- L'ensemble $\nabla_u T^* = \{u^*/u \in \nabla T\}$ est inclus dans ∇T^*. En effet, de la définition I.8.2 $T^*(y^*) = \sup_{u \in \nabla T} u^*(y^*)$, on a

$$\forall u \in \nabla T \quad \text{on a} \quad u^*(y^*) \leq T^*(y^*)$$

donc $u^* \in \nabla T^*$.

Soit $y^* \in Y^*$. Nous savons pas s'il existe $u_{y^*} \in \nabla T$ tel que $u^*_{y^*}(y^*) = T(y^*)$?

1.9 Relations entre T et T^*

Proposition I.9.1

Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y. Pour tout x dans X^+ et y^* dans Y^* on a

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq |\langle x, T^*(y^*) \rangle| + |\langle x, T^*(-y^*) \rangle|. \tag{1.18}$$

On a aussi, pour tout x dans X^+ et y^* dans Y^*_+

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq |\langle x, T^*(y^*) \rangle|.$$

Preuve

Soit x dans X^+. D'après la proposition I.8.1 il existe $u_x \in \nabla T$ tel que $T(x) = u_x(x)$.

Soit y^* dans Y^*. On a

$$\begin{aligned}
\langle T(x), y^*\rangle &= \langle u_x(x), y^*\rangle, \\
&= \langle x, u_x^*(y^*)\rangle, \\
\text{(d'après (1.1))} &\leq \langle x, T^*(y^*)\rangle.
\end{aligned}$$

Ce qui implique (on replace y^* par $-y^*$) que pour tout x dans X^+ et y^* dans Y^*

$$\langle T(x), -y^*\rangle \leq \langle x, T^*(-y^*)\rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\langle T(x), y^*\rangle| &\leq \sup\{\langle x, T^*(y^*)\rangle, \langle x, T^*(-y^*)\rangle\}, \\
&\leq |\langle x, T^*(y^*)\rangle| + |\langle x, T^*(-y^*)\rangle|.
\end{aligned}$$

On a aussi par (1.2) pour tout y^* dans Y^*

$$\begin{aligned}
\langle -T(x), y^*\rangle &\leq \langle T(-x), y^*)\rangle, \\
&\leq \langle x, u_x^*(y^*)\rangle, \\
\text{(d'après(1.1))} &\leq |\langle x, T^*(y^*)\rangle|.
\end{aligned}$$

et

$$\langle T(x), y^*\rangle \leq \langle x, T^*(-y^*)\rangle.$$

On déduire que pour tout x dans X^+ et y^* dans Y_+^*

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq |\langle x, T^*(y^*)\rangle|.$$

Pour $x < 0$,

$$\langle -T(x), y^*\rangle \leq \langle T(x), y^*\rangle \leq |\langle x, T^*(y^*)\rangle|.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Proposition I.9.2

Soit X un espace de Köthe, Y un espace de Banach complètement réticulé et T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y. alors, on a

$$T \leq T^{**}_{/X}. \tag{1.20}$$

Preuve

Considérons z dans X^{**}. On a par définition

$$T^{**}(z) = \sup_{v \in \nabla T^*} v^*(z).$$

Si on prend $x \in X$ on a aussi

$$T^{**}(x) = \sup_{v \in \nabla T^*} v^*(x).$$

Car $\{u^*\}_{u \in \nabla T} \subset \nabla T^*$, on obtient que

$$\sup_{u \in \nabla T} u^{**}(x) \leq \sup_{v \in \nabla T^*} v^*(x)$$

et on aura

$$\sup_{u \in \nabla T} u(x) \leq \sup_{v \in \nabla T^*} v^*(x).$$

Par conséquent

$$T(x) \leq \sup_{v \in \nabla T^*} v^*(x) = T^{**}(x), \quad \forall x \in X$$

d'où le résultat. ■

Corollaire I.9.3

Soient X un espace de Köthe, Y un espace de Banach complètement réticulé et T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y. Alors, on a

$$\nabla T \subset \nabla T^{**}_{/X}.$$

Preuve

Soit $u \in \nabla T$. D'après la dernière proposition on a $u(x) \leq T(x) \leq T^{**}(x)$, pour tout $x \in X$. ■

Remarques I.9.4

1) Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y et u un opérateur linéaire positif de Y dans Z. Est-ce que

$$(u \circ T)^* = T^* \circ u^* \,?$$

2) Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y et u un opérateur linéaire de Y dans Z tel que u^* est positif. Est-ce que

$$(T \circ u)^* = u^* \circ T^* \,?$$

Chapitre 2

Les opérateurs sous-linéaires qui se factorisent par $\mathbf{L}_p$

2.1 Introduction

Les travaux de ce chapitre se situent dans le cadre de développement de quelques théorèmes de factorisations dans le cas sous linéaire. Nombreux problèmes en analyse commutatif passent par le principe de factorisations, par exemple les opérateurs sommants dans toutes ses dimensions. Les études consacrées à ce domaine ont donné lieu à une littérature riche et vaste qu'on citera au fur et à mesure dans notre travail.

Grothendieck a établi dans [Gro56] que tout opérateur linéaire continu d'un espace $L_\infty(S,\lambda)$ dans un espace $L_1(\Omega,\mu)$ admet la factorisation

$$L_\infty(S,\lambda) \xrightarrow{\widetilde{u}} L_2(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L_1(\Omega,\mu)$$

où $\widetilde{u}$ est un opérateur linéaire continu et T_g l'opérateur de multiplication par une fonction $g \in L_2(\Omega,\mu)$.
Dans le même cercle d'idée, E. M. Nikishin a montré dans [Nik70] que tout opérateur linéaire continu d'un espace de Banach X dans un espace $L_0(\Omega,\mu)$ ((Ω,μ) espace de probabilité) admet la factorisation

$$X \xrightarrow{\widetilde{u}} L_p(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L_0(\Omega,\mu)$$

où $\widetilde{u}$ est un opérateur linéaire continu, T_g l'opérateur de multiplication par une fonction mesurable g et $0 < p < 1$.

Dans sa thèse [Mau74], B. Maurey a donné une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur $u : X \longrightarrow L_p(\Omega,\mu)$($(\Omega,\mu)$ un espace mesuré quelconque) admette la factorisation

$$X \xrightarrow{\widetilde{u}} L_q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L_p(\Omega,\mu)$$

où $\widetilde{u}$ est un opérateur linéaire continu, T_g l'opérateur linéaire de multiplication par une fonction $g \in L_r(\Omega,\mu)$ et p,q,r tels que $0 < p \leq q \leq \infty$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$.

L. Mezrag a supprimé dans [Mez85] l'hypothèse d'approximation métrique sur l'espace X des théorèmes de B. Maurey et les a généralisé dans [Mez04] pour les opérateurs de cotypes finis.

Dans [Pis86] , G. Pisier s'est attaqué à un problème plus général et a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur linéaire borné $u : X \longrightarrow L_r(\Omega, \mu)((\Omega, \mu)$ un espace mesuré quelconque) se factorise par $L_{p\infty}(\Omega, \nu)$, $0 < r < p < \infty$. Il a traité aussi le problème dual (i.e., la factorisation des opérateurs linéaires de $L_s(S, \lambda)$ dans un espace de Banach Y par $L_{q1}(S, \nu)$, pour $1 \leq q < s < \infty$).

Dans [AM02] D. Achour et L. Mezrag ont généralisé les théorèmes de factorisations des opérateurs linéaires d'un Banach X à valeurs dans L_r par $L_{p\infty}$ qui ont été fait par Pisier [Pis86], aux opérateurs sous-linéaires.

Dans ce chapitre on va traiter la généralisation du théorème de factorisation de Maurey aux cas des opérateurs sous-linéaires. Par une toute autre méthode, A. Defant dans [Def01] a généralisé ce type de factorisations aux opérateurs homogènes. Nous vous référons à [MT04] pour ce résultat. Donc, on étudiera l'équivalence suivante qui est notre résultat principal.
Soit $0 < p \leq q \leq \infty$. Soit $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$ un opérateur sous-linéaire continu.

$$\forall u \in \nabla T,\ u \text{ se factorise par } L_q(\Omega, \mu) \Longleftrightarrow T \text{ se factorise par } L_q(\Omega, \mu)$$

où $\nabla T = \{\text{opérateurs linéaires } u : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu) \text{ tels que } u \leq T\}$.

Dans une première section on donnera et on démontrera (pour l'aisance du lecteur) les théorèmes de Maurey dans le cas linéaire qui sont notre source d'inspiration. Nous référons à sa thèse pour d'amples informations [Mau74].

Dans la deuxième section on annonce la définition des opérateurs sous-linéaires p-convexes et q-concaves et quelques exemples et remarques concernant cette classe d'opé-

rateurs.

Dans une troisième section, on donnera notre résultat principal. On établira une condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence citée ci dessus aura une réponse positive. Autrement dit, nous démontrons que, si u est un opérateur linéaire $q-$convexe pour tout u dans ∇T et $C_{pq}(u)$ (la constante de la $q-$convexité de u) est uniformément borné, l'équivalence comme mentionnée dans le résumé de ce chapitre sera vérifiée et ceci sous la supposition que l'ensemble $\{g_u\}$ pour u dans ∇T est latticiellement borné. Sans cette condition l'équivalence est fausse. Nous donnerons un contre exemple pour montrer l'invalidité de cette équivalence.

Dans une quatrième section, on étudiera le problème dual i.e., donner des conditions nécessaires et suffisantes de factorisation des opérateurs sous-linéaires continus d'un espace $L_q(\Omega, \mu)$ dans un espace Banach complètement réticulé X par $L_p(\Omega, \mu)$ avec les mêmes conditions sur les nombres réels p, q.

2.2 Préliminaires

On commence par donner et démontrer les théorèmes de Maurey dans le cas linéaire qui sont notre source d'inspiration. Nous référons à sa thèse pour d'amples informations [Mau74].

Définition II.2.1

Soient X un espace de Banach réticulé, f une fonction d'une partie A de X dans $\mathbb{R}$. On dira que f est semi-continue inférieurement (s.c.i) si $epi\,(f)$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$ (resp. semi-continue supérieurement (s.c.s) si $epistrict\,(f)$ est ouvert dans $X \times \mathbb{R}$). Ou

$$\begin{aligned} epi\,(f) &= \{[x, \lambda] \in X \times \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \lambda\}, \\ epistrict\,(f) &= \{[x, \lambda] \in X \times \mathbb{R}, \quad f(x) < \lambda\}. \end{aligned}$$

Définition II.2.2

Soit A une partie d'un espace de Banach X. A est convexe si et seulement si

$$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in (A \times A) \quad \textit{la fonction } f : (x,y) \longrightarrow tx + (1-t)y$$

est continue de X^2 dans X ou $f(A \times A) \subset A$.

Théorème II.2.3 (théorème du graphe fermé)

Soient X et Y deux epaces de Banach u un opérateur linéaire de X dans Y. Si le graphe $u \times G(u)$ de u est fermé dans $X \times Y$, alors u est continu.

Lemme II.2.4

Soient K un convexe compact d'un espace localement compact et séparé (elcs), Ψ un ensemble convexe de fonctions réelles sur K s.c.s et ne prenant pas la valeur $+\infty$. On suppose que

a) *Chaque fonction f dans Ψ est concave,*

b) *Pour toute $f \in \Psi$, $\exists x \in K, \quad f(x) \geq 0$.*

Alors, il existe un point $x_0 \in K$ tel que $\quad f(x_0) \geq 0, \forall f \in \Psi$.

Théorème II.2.5

Soient p, q et r trois nombres réels où $0 < p \leq q \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, (Ω, μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices et $\{f_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de $L_p(\Omega, \mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

a) $\forall (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i \in I} |\alpha_i f_i(\omega)|^q\right)^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\sum_{i \in I} |\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

b) *Il existe une fonction g telle que $\int_\Omega |g|^r \, d\mu(w) \leq 1$ et que*

$$\forall i \in I, \quad \int_\Omega \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu(w) \leq C$$

(avec la convention $\frac{0}{0} = 0$*).*

Preuve

a)$\Longrightarrow$**b)**

1er cas, $p = q$. Il suffit de prendre $g = 1$.

2^{ème}cas, $q = +\infty,\ p < q\ (\Rightarrow r = p)$.

Soit $B(I) = \{\text{les sous-ensembles } J \text{ de } I \text{ finis}\}$. On pose

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in J \\ 0 & \text{si} \quad i \notin J \end{cases}$$

et

$$f_J = \sup_{i \in J} |f_i| \,.\mu - p.p.$$

La famille $(f_J)_{J \in B(I)}$ est filtrante croissante et bornée dans $L_p(\Omega, \mu)$ donc d'après (**a**) elle admet une borne supérieure. Soit g cette borne supérieure.

Donc

$$\|g\|_{L_p(\Omega,\mu)} \leq 1 \quad et \quad |f_i| \leq g \quad \forall i \in I$$

$3^{ème} cas$, $0 < p < q < \infty$.

On pose $s = \frac{q}{p} \Rightarrow (1 < q < +\infty$ et $s^* = \dfrac{r}{p})$.

Soit

$$K = \{g \in B_{L_{s^*}(\Omega,\mu)} : g \geq 0\}.$$

L'ensemble K est convexe, faiblement compact (convexe fermé et borné d'un espace réflexif). Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$, on définit $F_\alpha : K \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$F_\alpha(g) = \sum_{j \in J} |\alpha_i|^q - \int_\Omega \frac{\sum_{i \in I} |\alpha_i \, f_i|^q}{g^s} d\mu(w),$$

l'ensemble des F_α est convexe.

Pour tout α dans $\mathbb{R}^{(I)}$, F est concave et s.c.s.
($\int \frac{1}{g^s}$ est s.c.s en g sur K. Il suffit de la montrer pour K muni de la topologie de la norme, car sur un faiblement compact convexe, la topologie faible et la topologie forte coïncident et appliquons en suite le lemme de Fatou).

Posons

$$g_\alpha = \frac{1}{C}(\sum_{i\in I} |\alpha_i f_i|^q)^{\frac{1}{ss^*}}$$

avec

$$C = (\int_\Omega (\sum_{i\in I} |\alpha_i f_i|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{ss*}}.$$

Alors, $g_\alpha \in K$ et $F_\alpha(g_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$. D'après le lemme II.2.4 $\exists g_0 \in K$ telle que $\forall i \in I, \int_\Omega \frac{|f_i|^q}{g_0^s} \leq 1$ d'où le résultat en prenant $g = g_0^{\frac{1}{p}}$.

b)⇒a)

Résulte aisément de l'inégalité de Hőlder, on a $1 = \frac{1}{\frac{q}{p}} + \frac{1}{\frac{r}{p}}$ d'où

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega (\sum_{i\in I} |\alpha_i f_i|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_\Omega \left[(\sum_{i\in I} \left|\frac{\alpha_i f_i}{g}\right|^q)^{\frac{1}{q}}\right]^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\int_\Omega (\sum_{i\in I} \left|\alpha_i \frac{f_i}{g_i}\right|^q)^p d\mu(\omega))^{\frac{p}{q}} (\int_\Omega (|g|^p)^{\frac{r}{p}} d\mu(\omega))^{\frac{p}{r}} \\
&\leq (\int_\Omega (\sum_{i\in I} \left|\alpha_i \frac{f_i}{g_i}\right|^q)^p d\mu(\omega))^{\frac{p}{q}} (\int_\Omega (|g|^p)^{\frac{r}{p}} d\mu(\omega))^{\frac{p}{r}} \\
&\leq C \left[\sum_{i\in I} |\alpha_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Remarque II.2.6

Supposons que la famille $(f_i)_{i\in I}$ vérifie l'hypothèse

$$\sum_{i\in I} |\alpha_i|^q < +\infty \Rightarrow \int (\sum_{i\in I} |\alpha_i f_i(\omega)|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega) < +\infty.$$

Alors, on a une application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & l_q(I) & \longrightarrow & L_p(\Omega, \mu, l_q(I)) \\ & (\alpha_i) & \longmapsto & (\alpha_i f_i(\omega)) \end{array}$$

qui est continue, par le théorème du graphe fermé il existe donc une constante C telle que

$$(\int_\Omega (\sum_{i\in I} |\alpha_i f_i(\omega)|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega)))^{\frac{1}{p}} \leq C(\sum_{i\in I} |\alpha_i|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Si on prendra pour ensemble d'indices I la boule unité de X et on posera $f_x = u(x)$, on déduit immédiatement du Théorème II.2.5, le théorème suivant qui consiste en la condition nécessaire et suffisante de la factorisation.

Théorème II.2.7

Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré, u un opérateur linéaire de X dans $L_p(\Omega, \mu)$, $0 < p \leq q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) *Il existe une constante C positive finie telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans X, on a*

$$(\int_\Omega \left[\sum_{1\leq i\leq n} |u(x_i)|^q\right]^{\frac{p}{q}} d\mu(w))^{\frac{1}{p}} \leq C \left[\sum_{1\leq i\leq n} \|x_i\|_X^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

b) *Il existe une fonction g dans $B_{L_r(\Omega,\mu)}$ telle que pour tout x dans X, on a*

$$(\int_\Omega \left|\frac{u(x)}{g}\right|^q d\mu(w))^{\frac{1}{q}} \leq C \|x\|_X .$$

c) *Il existe une fonction g dans $B_{L_r(\Omega,\mu)}$ et $v \in L(X, L_q(\Omega, \mu)), \|v\| \leq C$ telle que $u = T_g o v$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & L_p(\Omega,\mu) \\ {\scriptstyle v}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle T_g} \\ & L_q(\Omega,\mu) & \end{array}$$

Preuve

Il se déduit facilement du théorème précédent.

Le théorème suivant concerne le problème dual dans le cas linéaire traité aussi par Maurey. Nous étudions ce même problème dans le cas sous-linéaire, dans la dernière section.

Théorème II.2.8

Soient p, q et r trois nombres réels tels que $0 < p \leq q < +\infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, (Ω, μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices et $\{f_i\}_{i\in I} \subset L_q(\Omega,\mu)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

a) *Il existe est une fonction mesurable g dans $B_{Lr(\Omega,\mu)}$ telle que*

$$\forall i \in I \qquad \int_\Omega |gf_i|^p(w)d\mu(w) \geq 1.$$

b) *Pour toute $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ dans $\mathbb{R}^{(I)}$ il existe une constante finie C telle que*

$$(\sum_{i\in I} |\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C(\int_\Omega (\sum_{i\in I} |\alpha_i f_i(w)|^p)^{\frac{q}{p}} d\mu(w))^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve

b)⇒a) Le cas $p = q$ est trivial.

Supposons donc $0 < p < q < +\infty$, la démonstration est alors identique à celle du théorème II.2.5.

Posons $s = \dfrac{q}{p}$ et soit K le convexe compact pour $\sigma\left(L^{s^*}, L^s\right)$. Soient les fonctions mesurables $h \geq 0$ telles que $\int h^{s^*} d\mu \leq 1$. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$ considérons la fonction F_α sur

K définie par

$$F_\alpha(h) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\alpha_i f_i|^p \, h \, d\mu - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p .$$

Chaque fonctions F_α est affine et continue sur K. L'ensemble des F_α est convexe, de plus si nous posons

$$h_\alpha = C \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i f_i|^p \right]^{\frac{q}{r}}$$

avec

$$C = (\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i f_i|^p \right]^{\frac{p}{q}} d\mu)^{\frac{-1}{S^*}},$$

nous avons que $h_\alpha \in K$ et

$$\begin{aligned} F_\alpha(h_\alpha) &= C \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i f_i(w)|^p \right]^{\frac{q}{p}} d\mu(w) - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \\ &= (\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i f_i(w)|^p \right]^{\frac{p}{q}} d\mu(w))^{\frac{p}{q}} - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \geq 0. \end{aligned}$$

D'après le lemme II.2.4, il existe $h_0 \in K$ telle que

$$\forall i \in I, \qquad \int_\Omega |f_i(w)|^p \, h_0 d\mu(w) \geq 1.$$

D'où le résultat avec $g = h_0^{\frac{1}{p}}$.

a)⇒b) Résulte aisément de l'inégalité de Hölder. En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\alpha_i f_i g(w)|^p \, d\mu(w) \\
&\leq \int_{\Omega} ((\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i f_i(w)|^p)^{\frac{1}{p}} g)^p d\mu(w) \\
&\leq (\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i f_i(w)|^p \right]^{\frac{q}{p}} d\mu(w))^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.■

Remarque II.2.9

Le résultat ne subsiste pas lorsque $q = +\infty$ car le dual de $L_\infty(\Omega, \mu)$ contient des éléments qui ne s'identifient pas à des fonctions sur (Ω, μ).

2.3 Opérateurs sous linéaires p-convexes, q-concaves

Dans cette section nous généralisons la notion d'opérateurs $p-$convexes et $q-$concaves aux opérateurs sous-linéaires. Nous traitons aussi quelques exemples et remarques concernant cette classe. Pour plus de détails voir [LT96] .

Définition II.3.1

1) *Soient E un espace de Banach arbitraire, X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur sous-linéaire $T : E \longrightarrow X$ est dit $p-$convexe s'il existe une constante positive C telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ les opérateurs*

$$\begin{array}{llll}
T_n & l_p^n(E) & \longrightarrow & X\left(l_p^n\right) \\
 & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & (T(x_1), ..., T(x_n))
\end{array}$$

sont uniformément bornés par C.

C'est à dire que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |T(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad si\ 1 \leq p < \infty,$$
$$\left\| \sup_{1 \leq i \leq n} |T(x_i)| \right\| \leq C \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \quad si\ p = \infty.$$

La plus petite constante C vérifiant ces inégalités sera notée par $C^p(T)$.

2) *Soient X, Y deux espaces de Banach dont X réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur sous linéaire $T : X \longrightarrow Y$, est dit $p-$concave s'il existe une constante C telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$ les opérateurs*

$$\begin{array}{rlcl} T_n : & X(l_p^n) & \longrightarrow & l_p^n(Y) \\ & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & (T(x_1), ..., T(x_n)) \end{array}$$

sont uniformément bornés par C.

C'est à dire que

$$\begin{array}{rcll} \|T(x_i)\|_{l_p^n(Y)} & \leq & C \|(x_i)\|_{X(l_p^n)} & si\ 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \|T(x_i)\| & \leq & C \left\| \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right\| & si\ p = \infty. \end{array}$$

La plus petite constante C vérifiant ces inégalités sera notée par $C_p(T)$.

3) *Si X est réticulé, on dira qu'il est $q-$convexe (resp. $q-$concave) si l'identité est $q-$convexe (resp. $q-$concave).*

Remarques II.3.2

Tout opérateur sous-linéaire q-convexe (resp. q-concave) est borné et $\|T\| \leq C^q(T)$ (resp. $\|T\| \leq C_q(T)$).

Tout espace de Banach est $1-$convexe. La $p-$convexité pour $1 \leq p \leq \infty$ est décroissante en p, voir [LT96]. Par exemple L_p pour $1 \leq p < \infty$ est $p-$convexe, et $C^p(L_p) = 1$.

Tout espace de Banach est $\infty-$concave. La $p-$concavité est croissante en p. Par exemple L_p pour $1 \leq p < \infty$ est $p-$concave et $C_p(L_p) = 1$.

2.4 Factorisation des opérateurs sous-linéaires de X dans L_p par L_q

On donnera dans cette section la factorisation des opérateurs sous- linéaires T de X un espace de Banach dans $L_p(\Omega,\mu), 0 < p \leq \infty$ par $L_q(\Omega,\mu)$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Nous vous référons sur ce résultat à [MT04].

Théorème II.4.1

Soient X un espace de Banach, (Ω,μ) un espace mesuré, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_p(\Omega,\mu)$ et $0 < p \leq q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) *Il existe une constante positive finie C telle que pour toute suite finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans X, on a*

$$(\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} |T(x_i)|^q\right]^{\frac{p}{q}} d\mu)^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad C\left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

(i.e., T est $p-$convexe et $C_{pq} \leq C$).

2) *Il existe une fonction g dans $B^+_{L_r(\Omega,\mu)}$, telle que pour tout x dans X, on a*

$$(\int_\Omega \left|\frac{T(x)}{g}\right|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} \leq C\,\|x\|_X\,.$$

3) *Il existe une fonction g dans $B^+_{L_r(\Omega,\mu)}$ et S un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_q(\Omega,\mu)$, tels que $\|S\| \leq C$ et $T = T_g o S$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Lp(\Omega,\mu) \\ {\scriptstyle S}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle T_g} \\ & Lq(\Omega,\mu) & \end{array}$$

Preuve

1)⇒2) Il suffit de prendre dans le théorème II.2.5 l'ensemble $\{\alpha_i = \|x_i\|_X\}_{i\in I} \in \mathbb{R}^{(I)}$

où $I = \{1, ..., n\}$ et pour les $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ dans $L_p(\Omega, \mu)$ telles que $f_i = T(\frac{x_i}{\|x_i\|_X})$. En effet

$$\begin{aligned}
(\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n |T(x_i)|^q\right]^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}} &= (\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left|\|x_i\|_X T(\frac{x_i}{\|x_i\|_X})\right|^q\right]^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \left[\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

donc il existe g dans $B^+_{L_r(\Omega,\mu)}$ telle que

$$\forall i \in I \quad (\int_\Omega \left|\frac{T(\frac{x_i}{\|x_i\|_X})}{g}\right|^q d\mu(\omega))^{\frac{1}{q}} \leq C$$

ce qui implique

$$\forall i \in I \quad (\int_\Omega \left|\frac{T(x_i)}{g}\right|^q d\mu(\omega))^{\frac{1}{q}} \leq C \|x_i\|_X .$$

Et par conséquent pour tout x dans X, on aura

$$(\int_\Omega \left|\frac{T(x)}{g}\right|^q d\mu(\omega))^{\frac{1}{q}} \leq C \|x\|_X .$$

2)⇒3) Il suffit de définir S par $S(x) = \dfrac{T(x)}{g}$.
L'opérateur S est sous-linéaire. En effet, soit x, y dans X

$$\begin{aligned}
S(x+y) &= \tfrac{T(x+y)}{g} \\
&\leq \tfrac{T(x)}{g} + \tfrac{T(y)}{g} \\
&\leq S(x) + S(y).
\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
S(\lambda x) &= \frac{T(\lambda x)}{g} \\
&= \lambda \frac{T(x)}{g} \\
&= \lambda S(x)
\end{aligned}$$

et on a bien que $T = T_g o S$ et $\|S\| = \left\|\frac{T}{g}\right\| \leq C$ (car T est continu).

3)⇒1) On utilisera l'inégalité de Hölder, avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\sum_{i=1}^n |T(x_i)|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu &= \left[\int_\Omega (\sum_{i=1}^n |g|^q \left|\frac{T(x_i)}{g}\right|^q)^{\frac{p}{q}} d\mu(\omega)\right] \\
&\leq (\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{T(x_i)}{g}\right|^q d\mu(\omega))^{\frac{p}{q}} (\int_\Omega (|g|^p)^{\frac{r}{p}} d\mu(\omega))^{\frac{p}{r}} \\
&\leq (\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{T(x_i)}{g}\right|^q d\mu(\omega))^{\frac{p}{q}} (\int_\Omega |g|^r d\mu(\omega))^{\frac{p}{r}} \\
&\leq C^p (\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q)^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve **3)⇒1)**. ■

Proposition II.4.2

Soient T_1, T_2 deux opérateurs sous-linéaires de X un espace de Banach dans Y un quasi-Banach réticulé. Si $T_1 \leq T_2$ (au sens de (1.8)). Alors, il existe une constante C_Y ne dépendant que de Y telle que

a) $|T_1(x)| \leq \sup\{|T_2(x)|, |T_2(-x)|\}$,

b) $\|T_1(x)\| \leq C_Y(\|T_2(x)\| + \|T_2(-x)\|)$.

Preuve

a) On a

$$T_1(x) \leq T_2(x) \Longleftrightarrow -T_1(x) \leq T_1(-x) \leq T_2(-x), \quad \forall x \in X.$$

Ce qui entraîne que

$$|T_1(x)| \leq \sup\{|T_2(x)|, |T_2(-x)|\}.$$

b) De **a**) on a

$$|T_1(x)| \leq |T_2(x)| + |T_2(-x)|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|T_1(x)\| &\leq \||T_2(x)| + |T_2(-x)|\| \\
&\leq C_Y(\|T_2(x)\| + \|T_2(-x)\|).
\end{aligned}$$

(La constante C_Y apparaît si Y est un quasi-Banach réticulé) d'où le résultat annoncé.
■

Proposition II.4.3

Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré, T_1 et T_2 deux opérateurs sous-linéaires continus de X dans $L_p(\Omega, \mu)$, et $0 < p \leq q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Si T_2 se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$, et $T_1(x) \leq T_2(x)$ pour tout x dans X, *alors T_1 se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$.*

Preuve

Supposons que T_2 se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$. D'après le Théorème II.4.1 il existe une constante positive finie C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X, on a

$$(\int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} |T_2(x_i)|^q \right]^{\frac{p}{q}} d\mu(w))^{\frac{1}{p}} \leq C_{pq} \left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

D'autre part et d'après la proposition II.4.2, on a

$$|T_1(x)| \leq \sup \{|T_2(x)|, |T_2(-x)|\}.$$

Ce qui entraîne que pour tout x dans X, on a

$$|T_1(x)| \leq |T_2(x)| + |T_2(-x)|, \quad \forall x \in X.$$

Alors on a clairement que

$$(\sum_{i=1}^{n} |T_1(x_i)|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(\sum_{i=1}^{n}(|T_2(x_i)|^q)^{\frac{1}{q}} + (\sum_{i=1}^{n} |T_2(-x_i)|^q)^{\frac{1}{q}})$$

D'où

$$\left\| (\sum_{i=1}^{n} |T_1(x_i)|^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p} \leq C'_q C_p \left(\left\| (\sum_{i=1}^{n} |T_2(x_i)|^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p} + \left\| (\sum_{i=1}^{n} |T_2(-x_i)|^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p} \right).$$

Finalement et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X, on a

$$\begin{aligned}(\int_\Omega(\sum_{i=1}^n |T_1(x_i)|^q)^{\frac{p}{q}}d\mu)^{\frac{1}{p}} &\leq 2C'_qC_p(\int_\Omega(\sum_{i=1}^n |T_2(x_i)|^q)^{\frac{p}{q}}d\mu)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_1\left[\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q\right]^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

où $C_1 = 2C_{pq}(T_2)\,C'_qC_p$ est une constante absolue dépendant que de p et q ($C_p = C_{L_p} = 2^{\frac{1}{p}-1}$ et $C_q = C_{L_q} = 2^{\frac{1}{q-1}}$ si $p, q < 1$). D'après le théorème II.4.1, on déduit que T_1 se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$.

Ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire II.4.4

Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace mesuré, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_p(\Omega, \mu)$ et $0 < p \leq q \leq \infty$, tels que $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Si T se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$, alors u se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$ pour tout u dans ∇T.

Remarque II.4.5

Soient p, q et r tels que $0 < p \leq q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Soient X un espace de Banach, (Ω, μ) un espace arbitraire de mesure et $T : X \longrightarrow L_p(\Omega, \mu)$ un opérateur sous-linéaire continu. Supposons que u se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$ dans le sens du théorème II.2.7 pour tout u dans ∇T. Est ce que T se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$? Autrement dit est ce que la réciproque du Corollaire II.4.2 est vraie ?

Dans ce dernier théorème et avec la supposition que $\{g_u\}_{u\in\nabla T}$ est latticiellement borné on donne une réponse positive. C'est le principal résulta de ce chapitre.

Théorème II.4.6

Soit T un opérateur sous-linéaire continu de X dans $L_p(\Omega, \mu)$ qui est un quasi- Banach réticulé complet. Supposons qu'il existe une constante positive finie C telle que pour tout u dans ∇T, $C_{pq}(u) \leq C$ et $\{g_u\}_{u\in\nabla T}$ est latticiellement borné dans $L_r(\Omega, \mu)$ (i.e., $\exists g_0 \in L_r^+(\Omega, \mu) : \forall u \in \nabla T,\ g_u \leq g_0$. Donc, T se factorise par $L_q(\Omega, \mu)$ (comme dans le théorème II.4.1).

Preuve

Il suffit de prendre $\widetilde{T}(x) = \frac{T(x)}{g}$ où $g = \dfrac{g_0}{\|g_0\|}$. Donc g_0 est dans $L_r^+(\Omega,\mu)$ et par la proposition I.5.6, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}(x)\right\| &= \left\|\frac{T(x)}{g}\right\| \\
&= \left\|\frac{u_x(x)}{g}\right\| \\
&\leq \|g_0\| \left\|\frac{u_x(x)}{g_0}\right\| \\
&\leq \|g_0\| \left\|\frac{u_x(x)}{g_{u_x}}\right\| \\
&\leq C\|g_0\|.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Remarque II.4.7.

Sans la condition additionnelle, ce théorème n'est pas vrai en général. On va le montrer avec un contre exemple. Prenons comme espace mesuré (Ω,μ) le tors $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, équipé de la mesure invariante $d\theta$. Soit X l'espace de Hilbert $H = L_2(\Omega,\mu) = L_2(\mathbb{T})$.

Pour tout r tel que $0 < r \leq \pi$ et pour toute $f \in L_2(\mathbb{T})$, on définit une fonction $2\pi-$périodique $S_r f \geq 0$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_r f(x) = \tfrac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y)|^2\, dy.$$

On pose $T_r f = \sqrt{S_r f}$. Pour tout x, l'expression $(T_r f)(x)$ est la norme L_2 de la fonction $\mathbf{1}_{(x-r,x+r)} f$. L'opérateur T_r est sous-linéaire et l'opérateur T défini par $Tf = \sup\{T_r f : 0 < r < \pi\}$, est aussi sous-linéaire de $L_2(\Omega,\mu)$ dans $L_1(\Omega,\mu)$. Tf est le racine quarré de la fonction maximale Mf^2 (l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood) de la fonction $f^2 \in L_1$, nous savons que Mf^2 est dans L_1 faible, d'où Tf est dans L_2 faible.

Considérons n dans $\mathbb{N}$. On peut partager $\mathbb{T}$ à $n-$intervalles avec la même longueur et prenons $x_1, ..., x_n$ dans $L_2(\Omega,\mu)$, la fonction caractéristique. On a $\|x_i\|^2 = 2\pi/n$ pour tout $i = 1, ..., n$, mais chaque fonction $T(x_i)$ vaut au moins $C/\sqrt{1+(i-j)}$ sur le support de x_i pour tout $j = 1, ..., n$ avec $C = (4\pi)^{-1}$, donc il résulte que

$$\int_\Omega (\sum_{i=1}^{n} |T(x_i)(\omega)|^2)^{\frac{1}{2}} d\mu(\omega) \geq C\sqrt{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}} \geq C\sqrt{\log n}$$

et $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = 2\pi$.

Mais d'après le petit théorème de Grothendieck voir [Pis86, Théorème 5.4.a], on a pour tout u dans ∇T

$$\begin{array}{rcl} \int_\Omega (\sum_{i=1}^{n} |u(x_i)(\omega)|^2)^{\frac{1}{2}} d\mu(\omega) & \leq & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u\| (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ \text{(D'après le théorème I.6.1, } \mathbf{b)}) & \leq & 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \|T\| (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Comme conclusion nous avons $C_{pq}(u) \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \|T\|$ et $C_{pq}(T) = \infty$ pour $p = 1$ et $q = 2$. On déduire que pour tout u dans ∇T, u se factorise par $L_2(\Omega, \mu)$ mais T ne factorise pas par $L_2(\Omega, \mu)$.

2.5 Factorisation des opérateurs sous-linéaires de L_q dans X par L_p (problème transposé).

Dans cette section on étudie le problème transposé et on donnera la factorisation des opérateurs sous-linéaires T de S_q sous espace fermé de $L_q(\Omega, \mu)$ dans X un espace de Banach par S_p sous-espace fermé de $L_p(\Omega, \mu)$ $0 < p \leq q \leq \infty$.

Théorème II.5.1

Soient p, q et r trois nombres réels tels que $0 < p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Soient (Ω, μ) un espace mesuré, S_q un sous-espace fermé de $L_q(\Omega, \mu)$, X un espace de Banach complètement réticulé, T un opérateur sous-linéaire borné de S_q dans X et C une constante positive finie. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.

a) *Il existe S_p un sous-espace fermé de $L_p(\Omega, \mu)$ tel que T admet la factorisation suivante*

$$\begin{array}{ccc} S_q & \xrightarrow{T} & X \\ {\scriptstyle J_g} \searrow & S_p & \nearrow {\scriptstyle v} \end{array}$$

v est un opérateur sous-linéaire tel que $\|v\| \leq C$.

g une fonction dans $B_{L_r(\Omega,\mu)}$.

J_g est l'opérateur induit sur S_q par l'opérateur de multiplication T_g.

b) *Pour toute suite finie $\{f_i\}_{1\leq i\leq n}$ dans S_q, on a*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(f_i)\|_X^p)^{\frac{1}{p}} \leq C(\int_\Omega (\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p)^{\frac{p}{q}} d\mu(w))^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve

a)⇒b). Résulte de l'inégalité de Hölder. En effet,

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|T(f_i)\|_X^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n} \|vJ_g(f_i)\|_X^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(\sum_{i=1}^{n} \|J_g(f_i)\|_{S_p}^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(\sum_{i=1}^{n} \|g(w).f_i(w)\|_{S_p}^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(\sum_{i=1}^{n} \|g(w)\|_{L_r}^p \|.f_i(w)\|_{Sq}^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C(\textstyle\int_\Omega (\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p)^{\frac{p}{q}} d\mu(w))^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

b)⇒a). Soit $\{\alpha_i\} \in \mathbb{R}^{(I)}$. Ecrivons

$$\begin{aligned}
|\alpha_i| &= \|T(f_i)\|_X \frac{|\alpha_i|}{\|T(f_i)\|_X} \\
&= \||\alpha_i|\, T(f_i)\|_X \frac{1}{\|T(f_i)\|_X} \\
&= \frac{\|T(|\alpha_i|\, f_i)\|_X}{\|T(f_i)\|_X}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n} \left\| T(\tfrac{|\alpha_i| f_i}{\|T(f_i)\|_X}) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
\text{(d'après } \mathbf{b)}\text{)} &\leq C(\textstyle\int_\Omega (\sum_{i=1}^{n} (\frac{|\alpha_i||f_i|}{\|T(f_i)\|_X})^p)^{\frac{1}{p}} d\mu(w))^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

prenons $F_i = \dfrac{|f_i|}{\|T(f_i)\|_X}$ dans $L_q(\Omega, \mu)$ donc d'après le théorème II.2.8

$$\exists g \in B_{L_r(\Omega,\mu)} \text{ telle que } \int_\Omega |gF_i|^p \, d\mu(w) \geq 1$$

ce que implique

$$\int_\Omega \left| g \tfrac{|f_i|}{\|T(f_i)\|_X} \right|^p d\mu(w) \geq 1,$$

d'où

$$\int_\Omega |gf_i|^p \, d\mu(w) \geq \|T(f_i)\|$$

donc

$$\forall f \in S_q, \quad \|T(f)\| \leq (\int_\Omega |gf|^p \, d\mu(w))^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

On a

$$\begin{aligned} T_g : \quad L_q(\Omega, \mu) &\longrightarrow \quad L_p(\Omega, \mu) \\ f &\longmapsto \quad fg \end{aligned}$$

définissant v sur $T_g(S_p)$ par $v(fg) = T(f)$, l'inégalité (2.3) implique que $\|v\| \leq C$.
En prolongent v à $S_p = \overline{T_g(S_p)}^{L_p}$ on aura le résultat et par conséquent la preuve. ■

Chapitre 3

Les opérateurs sous-linéaires fortement p-sommants

3.1 Introduction

Pietsch a montré dans [Pie67] que l'identité de l_1 dans l_2 est $2-$absolument sommant mais l'opérateur adjoint n'est pas $2-$absolument sommant. Pour cela, le concept des opérateurs linéaires fortement $p-$sommants. $(1 \leq p < \infty)$ a été introduit par J. S. Cohen [Coh73] comme une caractérisation du conjugué d'un opérateur linéaire absolument p^*-sommant. Un opérateur linéaire u entre deux espaces de Banach X et Y est fortement $p-$sommant pour $(1 < p < \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{1 \leq i \leq n} \|(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{1 \leq i \leq n} |\langle y_i^*, y) \rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.0}$$

La petite constante C qui vérifiant l'inégalité (3.0) est notée par $d_p(u)$, qui est une norme dans $\mathcal{D}_p(X, Y)$, l'espace de tous les opérateurs linéaires fortement $p-$sommants entre deux espaces de Banach X et Y. On a $\mathcal{D}_1(X, Y) = B(X, Y)$, l'espace vectoriel de tout opérateurs linéaires bornés de X dans Y.

Dans ce chapitre, on va généraliser la notion précédente aux opérateurs sous-linéaires et on donnera un analogue au théorème de domination de Pietsch pour cette catégorie. Ce théorème est l'un des principaux résultats de ce chapitre. Cohen a déduit le théorème de domination au cas linéaire simplement à partir de l'opérateur adjoint qui est p^*-sommant. Ce n'est pas le cas pour les opérateurs sous-linéaires car l'adjoint d'un opérateur sous-linéaire n'est encore bien dévloppé. On va le démontrer directement en utilisant le lemme de Ky Fan. On terminera ce chapitre par une étude relationnelle entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

Dans la première section, on donnera quelques définitions et terminologies concernant les espaces de Banach réticulés et des notations standards.
Dans une seconde section, on annoncera la généralisation d'opérateurs sous-linéaires positivement p-sommants et quelques propriétés concernant cette classe d'opérateurs. Pour

plus d'informations voir [Bla86,87,88].

On généralise dans une troisièmes section, la classe des opérateurs linéaires fortement $p-$sommants introduite par Cohen dans [Coh73] aux opérateurs sous-linéaires. Cette catégorie d'opérateurs vérifie le théorème de domination de Pietsch analogue au cas linéaire.

On terminera ce chapitre par étudier dans la section quatre, quelques relations entre les sous-linéaires fortement $p-$sommants T et les opérateurs linéaires $u \in \nabla T$, où

$$\nabla T = \{u \in L(X,Y) : u \leq T\}$$

et $L(X,Y)$ est l'espace des opérateurs linéaires de X dans Y.

3.2 Rappels de quelques terminologies

Dans cette section nous rappelons quelques terminologies déjà vues pour l'aisance du lecteur concernant les espaces de Banach réticulés.

Rappelons qu'une norme $\|.\|$ sur un espace de Riesz X est une norme réticulée si $\forall x, y \in X$, $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ (ce qui implique que pour tout $x \in X$ l'élément x et $|x|$ ont la même norme). Un espace de Riesz équipé d'une norme réticulée est appelé espace de Riesz normé. Si la norme est complète, on dira que X est un espace de Banach réticulé (Il est complètement réticulé s'il est complètement réticulé en tant qu'espace vectoriel). Les deux inégalités suivantes sont vérifiées $\|x^+ - y^-\| \leq \|x - y\|$ et $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$. Par exemple l'espace $L_1([0.1], \mu)$ est un espace de Banach réticulé. L'espace $C(K)$ est un espace de Banach réticulé. L'espace L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ est un un espace de Banach complètement réticulé.

Proposition III.2.1 ([LT96])

Le dual X^* d'un espace de Banach réticulé X est un espace de Banach complètement réticulé muni de l'ordre naturel

$$x_1^* \leq x_2^* \Longleftrightarrow \langle x_1^*, x\rangle \leq \langle x_2^*, x\rangle\,, \quad \forall x \in X^+ \tag{3.1}$$

où $\langle .,. \rangle$ *indique le crochet de dualité.*

Nous désignons par un sous-lattice d'un espace de Banach réticulé X le sous espace linéaire E de X tel que pour tout $x, y \in E$, le $\sup\{x, y\}$ appartient à E. L'injection isométrique $i : X \longrightarrow X^{**}$ telle que $\langle i(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$ envoie X dans un sous-lattice de X^{**}. On pourra consulter [LT96] pour plus d'informations. Si on considère X comme un sous-lattice de X^{**} on a pour $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow \langle x_1, x^*\rangle \leq \langle x_2, x^*\rangle\,, \quad \forall x^* \in X_+^*. \tag{3.2}$$

Nous continuons ce paragraphe par introduire quelques notations dont nous aurons besoin par la suite.

Soit n un entier. Soit X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $X(l_p^n)$ l'espace des suites $x = (x_1, ..., x_n)$ d'éléments de X telles que

$$\|x\|_{X\left(l_p^n\right)} = \left\| (\sum_1^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right\| \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

et

$$\|x\|_{X(l_\infty^n)} = \left\| \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| \right\| \text{ si } p = \infty.$$

L'espace $X(l_p^n)$ équipé de l'ordre naturel

$$x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i, \quad \forall i,$$

est un espace de Banach réticulé.

Soit maintenant X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites (x_i) dans X muni de la norme

$$\|(x_i)\|_{l_p(X)} = (\sum_1^\infty \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$(\text{resp. } \|(x_n)\|_{l_p^n(X)} = (\sum_1^n \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}})$$

si p est fini, et on prend le sup si p est infini.

On désigne aussi par $l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{n\ \omega}(X)$) l'espace des suites (x_i) dans X muni de la norme

$$\|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^\star}} (\sum_1^\infty |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}})$$
$$(\text{resp. } \|(x_n)\|_{l_p^{n\ \omega}(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^\star}} (\sum_1^n |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}).$$

Soit $v : l_{p^*} \longrightarrow X$ un opérateur linéaire tel que $v(e_i) = x_i$ (i.e., $v = \sum_1^\infty e_j \otimes x_j$, (e_j) est la base canonique de l_p). Alors,

$$\|v\| = \|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)}. \tag{3.3}$$

Nous rappelons enfin, la notion des opérateurs bornés pour l'ordre. Soit E un espace de Banach et X est un espace de Banach complètement réticulé. Un opérateur $u \in B(E, X)$ est dit borné pour l'ordre (voir [Nie73] et [HON81]) si $u(B_X)$ est borné pour l'ordre dans X (B_X est la boule unité de X). Dans ce cas, on pose

$$l(u) = \left\| \sup_{x \in B_X} |u(x)| \right\|.$$

On pourra montrer (voir [LJ80] ou [Szu85]) que l est une norme sur $l(E, X)$, l'espace de tous les opérateurs bornés pour l'ordre de E dans X.

Si $w : X \longrightarrow Y$, Y un espace de Banach complètement réticulé et w un opérateur positif (i.e., $w(x) \geq 0$, pour tout x dans X^+). Alors, wu est borné pour l'ordre.

3.3 Opérateurs sous-linéaires positivement p-sommants

Dans cette section on va généraliser la notion d'opérateurs positivement $p-$sommants défini au cas linéaires par Blasco [Bla86] aux opérateurs sous-linéaires (on peut consulter aussi [DJT95]). Pour plus de détails sur les opérateurs sous-linéaires $p-$sommants, nous suggérons au lecteur de voir [Sch74] et [AM04].

Définition III.3.1

Soient X, Y deux Banach réticulés et $T \in SB(X,Y)$. On dira que T est positivement $p-$sommant pour $1 \leq p \leq \infty$ si,

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, ..., x_n\} \subset X^+ \\ \left(\sum_1^n \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^\star}} \left(\sum_1^n |< x_i, \xi >|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

ou bien

$$(\|(T(x_i))\|_{l_p^n(Y)} \leq C \|(x_i)\|_{l_p^{n\,\omega}(X)}. \tag{3.4}$$

On note par

$$\pi_p^+(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ sous linéaires positivement } p-\text{sommants}\}$$

et

$$\pi_p^+(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant l'inégalité 3.4}\}.$$

Propriété d'idéal III.3.2

Soient $T \in \pi_p^+(X,Y)$, $v : E \longrightarrow X$ linéaire continu positif et $w : Y \longrightarrow F$ linéaire continu positif (E et F deux espaces Banach quelconques où F est réticulé). Alors, wTv est positivement $p-$sommant et

$$\pi_p^+(wTv) \leq \|w\| \, \pi_p^+(T) \, \|v\| .$$

Preuve

L'opérateur wTv est sous-linéaire d'après la Proposition I.4.2.

On a aussi

$$\|wTv(x)\| \leq \|w\| \, \|T(v(x))\| , \quad \forall x \in E.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, ..., x_n\}$ dans E^+ alors, $\{v(x_1), ..., v(x_n)\} \subset X^+$,

donc

$$\begin{aligned} (\sum_1^n \|T(v(x_i))\|^p)^{1/p} &\leq \pi_p^+(T) \sup_{\xi \in B_{X^\star}} (\sum_1^n |\langle v(x_i), \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \pi_p^+(T) \sup_{\xi \in B_{X^\star}} (\sum_1^n |\langle x_i, v^\star(\xi) \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

On pose $\eta = \dfrac{v^\star(\xi)}{\|v\|} \in B_{E^\star}$, donc

$$(\sum_1^n \|T(v(x_i))\|^p)^{1/p} \leq \pi_p^+(T) \, \|v\| \sup_{\eta \in B_{E^\star}} (\sum_1^n |\langle x_i, \eta \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$(\sum_1^n \|wTv(x_i)\|^p)^{1/p} \leq \|w\| \, \pi_p^+(T) \, \|v\| \sup_{\eta \in B_{E^\star}} (\sum_1^n |\langle x_i, \eta \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}$$

et par conséquent $wTv \in \pi_p^+(E, Z)$ et

$$\pi_p(wTv) \leq \|w\| \, \pi_p(T) \, \|v\| .$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire III.3.3

Soit X_0 un sous-lattice de X et $T \in \pi_p^+(X, Y)$. Alors,

$$T/_{X_0} \in \pi_p^+(X_0, Y) \ \ et \ \pi_p^+(T/_{X_0}) \leq \pi_p^+(T).$$

Corollaire III.3.4 (Injectivité)

Soit $Y_0 \subset Y$ un sous-lattice et $i : Y_0 \longrightarrow Y$ l'injection canonique, alors

$$T \in \pi_p^+(X, Y_0) \Longleftrightarrow iT \in \pi_p^+(X, Y).$$

Dans ce cas, on a $\pi_p^+(T) = \pi_p^+(iT)$.

Proposition III.3.5

Soient $0 \leq p \leq \infty$ et X un espace de Banach réticulé. Soit Y un espace complètement réticulé. Alors, les propriétés suivantes de la constante C et de l'opérateur sous-linéaire $T : X \longrightarrow Y$ sont équivalentes.

(1) *L'opérateur $T \in \pi_p^+(X, Y)$ et $\pi_p^+(T) \leq C$.*

(2) *Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout $v : l_{p^*}^n \longrightarrow X$, tel que $v(e_i) \in X^+$ on a*

$$\left(\sum_1^n \|Tv(e_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|v\| \ \ et \ \pi_p^+(Tv) \leq C\|v\|. \tag{3.5}$$

Preuve

(1)⇒(2). Supposons $T \in \pi_p^+(X, Y)$ et $\pi_p^+(T) \leq C$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v : l_{p^*}^n \longrightarrow X$, d'après la propriété d'idéale on a

$$Tv \in \pi_p^+\left(l_{p^*}^n, Y\right) \text{ et } \pi_p^+(Tv) \leq C\|v\|.$$

(2)⇒(1). On définit v par $v(e_i) = x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ et $x_i \in X^+$ où (e_i) est la base canonique de l_p^n. On a

$$\|v\| = \sup_{\xi \in B_{X^\star}} \left(\sum_1^n |< x_i, \xi >|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}(\sum_1^n \|T(x_i)\|^p)^{1/p} &= (\sum_1^n \|T(v(e_i))\|^p)^{1/p}, \\ &\leq C\,\|v\|\,, \\ &\leq C \sup_{\xi \in B_{X^\star}} \left(\sum_1^n |< x_i, \xi >|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

D'où T est positivement $p-$sommant et $\pi_p^+(T) \leq C$. ■

Théorème III.3.6 (Théorème d'inclusion)

Soit $T \in SL(X,Y)$, et $1 \leq p < q \leq \infty$,, on a

1)-

$$\pi_p^+(X,Y) \subset \pi_q^+(X,Y)$$

et

$$\forall T \in \pi_p^+(X,Y)\,,\ \pi_q^+(T) \leq \pi_p^+(T)\,.$$

2)-

$$\pi_p(X,Y) \subset \pi_p^+(X,Y)$$

et

$$\forall T \in \pi_p^+(X,Y)\,, \pi_p^+(T) \leq \pi_p(T)\,.$$

Preuve

1)- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, ..., x_n\} \subset X^+$. Si on pose

$$\lambda_i = \|T(x_i)\|^{(\frac{q}{p})-1}\,,$$

on aura

$$\|T(x_i)\|^q = \|T(\lambda_i x_i)\|^p\,.$$

Si T est $p-$sommant, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_1^n \|T(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_1^n \|T(\lambda_i x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \pi_p^+(T) \sup_{\xi\in B_{X^\star}} \left(\sum_1^n \lambda_i^p |< x_i, \xi >|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Puisque $p < q$ et d'après l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{(q/p)} + \frac{1}{(q/q-p)} = 1$), on obtient que

$$\begin{aligned}\left(\sum_1^n \|T(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p^+(T) \left(\sum_1^n \lambda_i^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{\xi\in B_{X^\star}} \left(\sum_1^n |< x_i, \xi >|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq \pi_p^+(T) \left(\sum_1^n \|T(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{\xi\in B_{X^\star}} \left(\sum_1^n |< x_i, \xi >|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\left(\sum_1^n \|T(x_i)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p^+(T) \sup_{\xi\in B_{X^\star}} \left(\sum_1^n |< x_i, \xi >|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

et par conséquent T est positivement $q-$sommant et $\pi_q^+(T) \leq \pi_p^+(T)$.

2)-Evident. ■

3.4 Extension du théorème de Pietsch aux opérateurs positifs

L'extension suivante du théorème fondamental de factorisation de Pietsch pour les opérateurs sous-linéaires positivement $p-$sommants est l'analogue naturelle du cas linéaire. La démonstration dont nous renvoyons le lecteur aux références [Pie67, Pis86, DJT95], se fera exactement comme pour le cas des opérateurs linéaires.

Théorème III.4.1

Soient X, Y deux espaces Banach réticulés et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous linéaire positivement $p-$sommant et $1 \leq p < \infty$. Il existe une probabilité λ de Borel sur $\left(B_{X^\star}^+,\ \sigma(X^\star, X)\right)$ ($B_{X^*}^+ = B_{X^*} \cap X_+^*$) telle que

$$\forall x \in X,\ \|T(x)\| \leq \pi_p^+(T) \left(\int_{B_{X^\star}^+} |< x, \xi >|^p \, d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.6}$$

S'il existe $C > 0$ vérifiant l'inégalité (3.6), alors T est positivement $p-$sommant et $\pi_p^+(T) \leq C$.

Dans ce paragraphe, on étudie le problème relationnel entre les opérateurs sous- linéaires positivement $p-$sommants de X un espace de Banach dans Y un espace de Banach complètement réticulé et les opérateurs linéaires inférieurs ou égaux à T.

Proposition III.4.2

Soient X, Y deux espaces de Banach réticulés et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire continu. Si

$$T \in \pi_p^+(X, Y)$$

alors

$$\forall u \in \nabla T, \quad u \in \pi_p^+(X, Y).$$

Preuve

Puisque T est positivement $p-$sommant donc d'après le théorème III.4.1 il existe une probabilité de Borel λ sur $\left(B_{X^\star}^+,\ \sigma(X^\star, X)\right)$ telle que

$$\forall x \in X,\ \|T(x)\| \leq \pi_p^+(T) \left(\int_{B_{X^\star}^+} |< x, \xi >|^p \, d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après le Théorème I.6.1, on a pour tout x dans X et tout u dans ∇T

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|, \\ &\leq 2\pi_p^+(T) \left(\int_{B_{X^\star}^+} |< x, \xi >|^p \, d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'où u est positivement $p-$sommant et $\pi_p^+(u) \leq 2\pi_p^+(T)$. ■

3.5 Opérateurs sous-linéaires fortement $p-$sommants

On va maintenant introduira une généralisation de la classe d'opérateurs linéaires fortement $p-$sommants défini en 1973 par Cohen [Coh73]. On donne un théorème de domination comme dans le cas linéaire mais avec une démonstration différente car le cas linéaire a été obtenus à l'aide de l'opérateur adjoint qui est p^*-sommant. Dans le cas sous-linéaire c'est pas possible en l'absence de l'adjoint d'un opérateur sous linéaire. On utilise le lemme de Ky Fan pour le démontré.

Définition III.5.1

Soient X un espace de Banach, Y un Banach réticulé. Un opérateur sous-linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est fortement $p-$sommant ($1 < p < \infty$), s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\|(\langle T(x_i), y_i^* \rangle)\|_{l_1^n} \leq C \|(x_i)\|_{l_p^n(X)} \|(y_i^*)\|_{l_{p^*}^n{}^{\omega}} . \tag{3.7}$$

On note par $\mathcal{D}_p(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs sous-linéaires qui sont fortement $p-$sommants de X dans Y et on note par $d_p(T)$ la plus petite constante C vérifiant l'inégalité (3.7). Pour la définition d'un opérateur fortement positivement $p-$sommant, on remplace Y^* par Y_+^* et $d_p(T)$ par $d_p^+(T)$.

Proposition III.5.2

Soient $T \in SB(X, Y)$ et $v : l_p^n \longrightarrow Y^*$ un opérateur linéaire borné. L'opérateur sous-linéaire T est fortement $p-$sommant si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), v(e_i) \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \|v\| . \tag{3.8}$$

Pour $p = 1$, on a $D_1(X, Y) = SB(X, Y)$.

Donnons un exemple d'opérateur sous-linéaire fortement $p-$sommant.

Exemple III.5.3

Soit $1 < p < \infty$ et n, $N \in \mathbb{N}$. Soit u un opérateur linéaire de l_2^n dans l_p^N. Alors, l'opérateur sous-linéaire $T(x) = |u(x)|$ est fortement $2-$sommant. En effet ; soit m un entier. Considérons $(x_j)_{1\leq j\leq m} \subset l_2^n$ et $\left(y_j^*\right)_{1\leq j\leq m} \subset l_{p^*}^N$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1)$. Utilisons (3.1) et (3.2) et prenant $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ on aura

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{m} \left|\left\langle T(x_j), y_j^*\right\rangle\right| \\ \leq & \sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}| \left\langle T(e_i), \left|y_j^*\right|\right\rangle . \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{m} \left|\left\langle T(x_j), y_j^*\right\rangle\right| \\ \leq & (\sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i,j=1}^{m,n} \left\langle T(e_i), \left|y_j^*\right|\right\rangle^2)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & (\sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 \sum_{j=1}^{m} (\left\langle \frac{T(e_i)}{\|u(e_i)\|}, \left|y_j^*\right|\right\rangle)^2)^{\frac{1}{2}} \ (\|u(e_i)\| = \|T(e_i)\|) \\ \leq & (\sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^2)^{\frac{1}{2}} \pi_2(u) \sup_{\|y^{**}\|_{l_p^N}=1} (\sum_{j=1}^{m} \left|\left\langle y^{**}, \left|y_j^*\right|\right\rangle\right|^2)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & (\sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^2)^{\frac{1}{2}} \pi_2(u) C\left(l_p^N\right) \sup_{\|y^{**}\|_{l_p^N}=1} (\sum_{j=1}^{m} \left|\left\langle y^{**}, y_j^*\right\rangle\right|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut que $d_2(T) \leq \pi_2(u) C\left(l_p^N\right)$, car u est de rang fini, par conséquent u est $2-$sommant ($C\left(l_p^N\right)$ est la constante qui dépend seulement de l_p^N). On peut déduire que pour tout opérateur u linéaire q^*-sommant $(1 < q < \infty)$ de l_q dans l_p^N alors, l'opérateur sous-linéaire T tel que $T(x) = |u(x)|$ est fortement $q-$sommant.

Proposition III.5.4

Soient X un espace de Banach, Y et Z sont deux espaces de Banach réticulés. Soient $T \in SB(X, Y)$, R opérateur positif dans $B(Y, Z)$ et $S \in B(E, X)$.

(a) *Si T est un opérateur sous-linéaire fortement $p-$sommant, alors, $R \circ T$ est un opérateur sous-linéaire fortement $p-$sommant et $d_p(R \circ T) \leq \|R\|_Z d_p(T)$.*

(b) *Si T est un opérateur sous-linéaire fortement $p-$sommant, alors, $T \circ S$ est un opérateur sous-linéaire fortement $p-$sommant et $d_p(T \circ S) \leq \|S\|_X \, d_p(T)$.*

Preuve

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ et $z_1^*, ..., z_n^* \in Z^*$. Il suffit d'utiliser (3.8) pour démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle R \circ T(x_i), z_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p)^{\frac{1}{p}} \|v\|$$

où $v : Z \longrightarrow l_{p^*}^n$ tel que $v(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^*(z) e_i$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\langle R \circ T(x_i), z_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), R^*(z_i^*) \rangle| \\ &\leq (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \|w\| \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w(y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R^*(z_i^*), y \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle z_i^*, R(y) \rangle e_i \\ &= \|R(y)\| \sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^*, \tfrac{R(y)}{\|R(y)\|} \right\rangle e_i. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq \|R\| \sup_{z \in B_Z} \left\| (z_i^*(z))_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_{p^*}^n} \\ &\leq \|R\| \, \|v\|. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $e_1, ..., e_n \in E$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$. On a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} |\langle T \circ S(e_i), y_i^* \rangle| \\ = & \sum_{i=1}^{n} |\langle T(S(e_i)), y_i^* \rangle| \\ \leq & \; d_p(T)(\sum_{i=1}^{n} \|(S(e_i))\|_X^p)^{\frac{1}{p}} \|v\| \; (v(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^*(y) e_i) \\ \leq & \; d_p(T) \|S\| (\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_E^p)^{\frac{1}{p}} \|v\|. \end{aligned}$$

Ce qui entraine que $d_p(T \circ S) \leq \|S\| \, d_p(T)$. ■

On va maintenant présenter le théorème de domination concernent la classe d'opérateurs sous-linéaires qui est le résultat principal de ce chapitre. Mais on commence par annoncer le lemme de Ky Fan. Pour la preuve de ce lemme, le lecteur intéressé peut consulter [DJT95].

Lemme III.5.5 (Lemme de Ky Fan)
Soient E un espace topologique vectoriel de Hausdorff et soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble compact et convexe de E. Soit M un ensemble des fonctions dans $\mathcal{C}$ à valeurs dans $(-\infty, \infty]$ possèdant les propriétés suivantes

(a) *Toute $f \in M$ est convexe et faiblement semi-continue.*

(b) *Si $g \in conv(M)$, il existe une fonction $f \in M$ avec $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathcal{C}$.*

(c) *Il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que toute $f \in M$ à valeur $\leq r$.*

Alors, il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $f(x_0) \leq r$ pour toute $f \in M$.

Théorème III.5.6 (Théorème de domination)
Soient X un espace de Banach et Y un espace de Banach réticulé. Soit $T \in SB\,(X, Y)$ un opérateur sous-linéaire continu. On dit que T est fortement $p-$sommant ($1 < p < \infty$) si et seulement si, il existe une constante $C > 0$ et une mesure de probabilité de Radon μ dans $B_{Y^{**}}$ tel que pour tout $x \in X$, on a

$$|\langle T\,(x)\,, y^* \rangle| \leq C \, \|x\| \, (\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} \, d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.9}$$

On note, dans ce cas

$$d_p(T) = \inf \{C > 0 : \text{ toute } C \text{ vérifiant l'inégalité (3.9)}\}.$$

Preuve

Premièrement, on démontre l'inverse. Soit $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$. On a par (3.9)

$$|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \|x_i\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &\leq C \sum_{i=1}^{n} (\|x_i\| (\textstyle\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}) \\
&\leq C(\sum_{i=1}^{n} (\|x_i\|)^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} (\textstyle\int_{B_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq C(\sum_{i=1}^{n} (\|x_i\|)^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\|(y_i^*(y))_{1 \leq i \leq n}\right\|_{l_{p^*}^n}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$ et $d_p(T) \leq C$.

Pour prouver la première implication, soit $K = B_{Y^{**}}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{C}$ des mesures de probabilités dans $C(K)^*$. Il est un compact convexe de $C(K)^*$ équipé de la topologie faible $\sigma(C(K)^*, C(K))$. Soit M l'ensemble de toutes les fonctions dans $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f_{((x_i),(y_i^*))}(\mu) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} (|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| - \tfrac{C}{p} \|x_i\|^p - \tfrac{C}{p^*} \int_K |\langle y_i^*, y^{**} \rangle|^{p^*} d\mu(y^{**})) \tag{3.10}$$

où $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$,et $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \subset Y^*$.

Il est clair que ces fonctions sont continues et convexes. Appliquant maintenant le lemme Ky Fan avec $E = C(K)^*$. Soient les deux fonctions f, g qui sont dans M et $\alpha \in [0, 1]$ tels que

$$f_{((x_i'),(y_i'^*))}(\mu) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} (|\langle T(x_i'), y_i^* \rangle| - \tfrac{C}{p} \|x_i'\|^p - \tfrac{C}{p^*} \int_K |\langle y_i'^*, y^{**} \rangle|^{p^*} d\mu(y^{**}))$$

et

$$g_{((x_i''^j),(y_i''^*))}(\mu) =$$

$$\sum_{i=1}^{l}(|\langle T\left(x_i''\right),y_i^*\rangle|-\tfrac{C}{p}\left\|x_i''\right\|^p-\tfrac{C}{p^*}\int_K|\langle y_i''^*,y^{**}\rangle|^{p^*}\,d\mu\left(y^{**}\right)).$$

Il s'en suit (car T est positivement homogène)

$$\begin{aligned}\alpha f &= \sum_{i=1}^{k}\alpha(|\langle T\left(x_i'\right),y_i^*\rangle|-\tfrac{C}{p}\left\|x_i'\right\|^p-\tfrac{C}{p^*}\textstyle\int_K|\langle y_i'^*,y^{**}\rangle|^{p^*}\,d\mu\left(y^{**}\right))\\ &= \sum_{i=1}^{k}(\left|\left\langle T(\alpha^{\frac{1}{p}}x_i'),\alpha^{\frac{1}{p^*}}y_i^*\right\rangle\right|\\ &= -\tfrac{C}{p}\left\|\alpha^{\frac{1}{p}}(x_i')\right\|^p-\tfrac{C}{p^*}\textstyle\int_K\left|\left\langle\alpha^{\frac{1}{p^*}}y_i'^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*}\,d\mu\left(y^{**}\right))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\,g &= \sum_{i=1}^{l}(1-\alpha)\,(|\langle T\left(x_i''\right),y_i^*\rangle|-\tfrac{C}{p}\left\|x_i''\right\|^p\\ &\quad-\tfrac{C}{p^*}\textstyle\int_K\left|\left\langle(1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}}y_i''^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*}\,d\mu\left(y^{**}\right))\\ &= \sum_{i=1}^{l}(\left|\left\langle T\left((1-\alpha)^{\frac{1}{p}}x_i''\right),(1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}}y_i^*\right\rangle\right|\\ &\quad-\tfrac{C}{p}\left\|(1-\alpha)^{\frac{1}{p}}x_i''^j\right\|^p-\tfrac{C}{p^*}\textstyle\int_K\left|\left\langle(1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}}y_i''^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*}\,d\mu\left(y^{**}\right)).\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\alpha f+(1-\alpha)\,g=$$

$$\sum_{i=1}^{n}(|\langle T\left(x_i\right),y_i^*\rangle|-\tfrac{C}{p}\left\|x_i\right\|^p-\tfrac{C}{p^*}\int_K|\langle y_i^*,y^{**}\rangle|^{p^*}\,d\mu\left(y^{**}\right))$$

avec $n=k+l$,

$$x_i=\begin{cases}\alpha^{\frac{1}{p}}x_i' & \text{si}\quad 1\le i\le k,\\ (1-\alpha)^{\frac{1}{p}}x_i'' & \text{si}\quad k+1\le i\le n,\end{cases}$$

et

$$y_i^*=\begin{cases}\alpha^{\frac{1}{p^*}}y_i'^* & \text{si}\quad 1\le i\le k,\\ (1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}}y_i''^* & \text{si}\quad k+1\le i\le n.\end{cases}$$

Ce qui démontre que M est convexe et par conséquent la condition **(b)** du lemme III.5.5 est vérifiée.

Pour la condition **(c)**, soit $y_0 \in B_Y$ tel que

$$\sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

et f de la forme (3.10)

$$\begin{aligned} f(\delta_{y_0}) &= \sum_{i=1}^{n} (|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| - \tfrac{C}{p} \|x_i\|^p - \tfrac{C}{p^*} \textstyle\int_K |\langle y_i^*, y^{**} \rangle|^{p^*} \, d\delta_{y_0}(y^{**})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| - \tfrac{C}{p} (\|x_i\|^p + \tfrac{C}{p^*} |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^{p^*})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| - C(\frac{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^{p^*}}{p^*}). \end{aligned}$$

Utilisant l'identité élémentaire

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad \alpha\beta = \inf_{\epsilon > 0} \left\{ \frac{1}{p} \left(\frac{\alpha}{\epsilon} \right)^p + \frac{1}{p^*} (\epsilon\beta)^{p^*} \right\} \tag{3.11}$$

prenons $\alpha = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}, \beta = (\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}$ et $\epsilon = 1$ on trouve que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| - \tfrac{C}{p} (\|x_i\|^p + \tfrac{C}{p^*} |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^{p^*})) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| - C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

La dernière quantité est inférieure ou égale à zéro (par hypothèse et parce que T est fortement $p-$sommant). Si on prend $r = 0$, on aura la condition **(c)** vérifiée. Par le lemme de Ky Fan, il existe $\mu \in \mathcal{C}$ telle que $f(\mu) \leq 0$ pour toute $f \in M$. Si on prend $x \in X$ et $y^* \in Y^*$ on aura

$$f(\mu) = f_{(x,y^*)}(\mu) = |\langle T(x), y^* \rangle| - \tfrac{C}{p} \|x\|^p - \tfrac{C}{p^*} \int_K |\langle y^*, y^{**} \rangle|^{p^*} \, d\mu \leq 0.$$

D'où

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq C(\frac{1}{p} \|x\|^p + \frac{1}{p^*} \int_K |\langle y^*, y^{**} \rangle|^{p^*} \, d\mu).$$

Remplaçant x par $\dfrac{1}{\epsilon}x, y^*$ par ϵy_i^* et prenant la borne inférieure pour $\epsilon > 0$ (d'après (3.11)), on trouve

$$\begin{aligned}
|\langle T(x), y^*\rangle| &\leq C(\tfrac{1}{p}\|x\|^p + \tfrac{1}{p^*}\int_K |\langle y^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\mu) \\
&\leq C(\tfrac{1}{p}\left\|\frac{x}{\epsilon}\right\|^p + \tfrac{1}{p^*}\int_K |\langle \epsilon y^*, y^{**}\rangle|^{p^*} d\mu) \\
&\leq C(\tfrac{1}{p}\left(\frac{\|x\|}{\epsilon}\right)^p + \tfrac{1}{p^*}\left(\epsilon(\int_K |\langle y^*, y^{**}\rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}\right)^{p^*} \\
&\leq C\|x\|\int_K |\langle y^*, y^{**}\rangle|^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq C\|x\|\,\|y^*\|_{L_{p^*(B_{Y^{**}},\mu)}}$$

d'où la démonstration. ■

Corollaire III.5.7

Considérons $1 < p_1, p_2 < \infty$ tels que $p_1 \leq p_2$. Si $T \in D_{p_2}(X, Y)$ alors, $T \in D_{p_1}(X, Y)$ et

$$d_{p_1}(T) \leq d_{p_2}(T).$$

Corollaire III.5.8

Soient X un espace de Banach, Y un espace Banach réticulé. et un opérateur sous-linéaire $T_1 \in D_p(X, Y)$ $(1 < p < \infty)$, si l'opérateur sous-linéaire $T_2 \leq T_1$. Alors $T_2 \in D_p^+(X, Y)$.

Preuve

De l'inégalité (3.2), on a pour tout x dans X et y^* dans Y_+^*

$$\langle T_2(x), y^*\rangle \leq \langle T_1(x), y^*\rangle$$

et par conséquent

$$-\langle T_2(x), y^*\rangle \leq \langle T_1(-x), y^*\rangle.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\langle T_2(x), y^*\rangle| &\leq \sup\{\langle T_1(x), y^*\rangle, \langle T_1(-x), y^*\rangle\} \\ &\leq \sup\{|\langle T_1(x), y^*\rangle|, |\langle T_1(-x), y^*\rangle|\} \\ &\leq |\langle T_1(x), y^*\rangle| + |\langle T_1(-x), y^*\rangle| \end{aligned}$$

et d'après (3.9) on aura

$$|\langle T_2(x), y^*\rangle| \leq 2d_p(T_1)\|x\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.12}$$

On obtient que l'opérateur T_2 est positivement fortement $p-$sommant et $d_p^+(T_2) \leq 2d_p(T_1)$.

■

3.6 La relation entre les opérateurs linéaires et sous-linéaires

Dans cette section on étudie la relation entre les opérateurs sous-linéaires T et les opérateurs linéaires $u \in \nabla T$. En utilisant les résultats précédents.

Proposition III.6.1.

Soient X un espace de Banach réticulé et Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur sous-linéaire borné de X dans Y. Supposons que T est fortement $p-$sommant ($1 < p < \infty$). Alors, pour tout $u \in \nabla T$, u est fortement positivement $p-$sommant, et u^* est positivement p^*-sommant.

Preuve

D'après (3.2) on a pour tout x dans X et y^* dans Y_+^*

$$\langle u(x), y^*\rangle \leq \langle T(x), y^*\rangle$$

et par conséquent

$$-\langle u(x), y^*\rangle \leq \langle T(-x), y^*\rangle.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\langle u(x), y^*\rangle| &\leq \sup\{\langle T(x), y^*\rangle, \langle T(-x), y^*\rangle\} \\ &\leq \sup\{|\langle T(x), y^*\rangle|, |\langle T(-x), y^*\rangle|\} \\ &\leq |\langle T(x), y^*\rangle| + |\langle T(-x), y^*\rangle| \end{aligned}$$

et d'après (3.9) on aura

$$|\langle u(x), y^*\rangle| \leq 2d_p(T)\,\|x\|\,(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*}\, d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.13}$$

Ce qui entraine

$$\|u^*(y^*)\| \leq 2d_p(T)(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*}\, d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.14}$$

Ainsi l'opérateur u^* est positivement p^*-sommant et $\pi_+(u^*) \leq 2d_p(T)$. ■

Remarque III.6.2

Si y^* est négatif on a aussi l'inégalité (3.14). On ignore si u est fortement $p-$sommant.

On continue par étudier l'inverse de la proposition précédente.

Théorème III.6.3

Soient X un espace de Banach réticulé et Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur sous-linéaire borné de X dans Y. Supposons qu'il existe une constante positive finie $C > 0$, un ensemble I, un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I et $\{u_i\}_{i\in I} \subset \nabla T$ tels que pour tout x dans X,

$$|\langle u_i(x), y^*\rangle| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} |\langle T(x), y^*\rangle| \tag{3.15}$$

et $d_p(u_i) \leq C$ uniformément . Alors,

$$T \in D_p(X, Y) \text{ et } d_p(T) \leq C.$$

Preuve

Pour tout $i \in I$ prenons u_i fortement $p-$sommant, d'après le théorème III.5.6 il existe μ_i une mesure de probabilité Radon sur $B_{Y^{**}}$ telle que pour tout $x \in X$, on a

$$|\langle u_i(x), y^*\rangle| \leq d_p(u_i)\,\|x\|\,(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*}\, d\mu_i(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.16}$$

Comme on a pour tout x dans X et $y^* \in Y^*$,

$$|\langle u_i(x), y^*\rangle| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} |\langle T(x), y^*\rangle|$$

on obtient que pour tout x dans X et $y^* \in Y^*$,

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq \lim_{\mathcal{U}} d_p(u_i)\,\|x\|\,(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*}\, d\mu_i(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

La boule d'unité $B_{Y^{**}}$ est faiblement compacte, d'où μ_i converge faiblement vers une probabilité μ sur $B_{Y^{**}}$. Par conséquent

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq C\,\|x\|\,(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*}\, d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$

pour tout x dans X et $y^* \in Y^*$. Ce qui implique que $d_p(T) \leq C$. ■

Chapitre 4

Les opérateurs sous-linéaires fortement l_p-sommants non-commutatifs

4.1 Introduction

Dans la théorie récente des espaces d'opérateurs (où les espaces de Banach non-commutatifs) développée par [Ble92a] [Ble92b] [BP91] [ER88] [ER91] [ER93] [Pis96] [Rua88] et [Pis98], opérateur borné a été remplacé par opérateur complètement borné, isomorphe par complètement isomorphe et espace de Banach par espace d'opérateurs(ou encore espaces de Banach quantiques). Précisément, on regarde dans cette nouvelle catégorie d'espaces tout espace de Banach comme étant un sous espace fermé de $B(H)$ pour un certain espace de Hilbert H ($B(H)$ est l'espace de Banach de tous les opérateurs bornés de H dans lui même muni de la norme forte) qui est non-commutatif, au lieu de le voir comme un sous espace d'un $C(K)$ (l'espace de toutes les fonctions continues sur le compact K) qui est commutatif. La caractérisation abstraite donnée par Ruan dans [Rua88] a signé la date de naissance de cette théorie. Dans [Pis96], Pisier a construit l'espace de Hilbert d'opérateurs OH (i.e., l'unique espace vérifiant $\overline{OH^{\star}} = OH$ complètement isométriquement comme dans le cas des espaces de Banach classiques parce qu' il existe beaucoup d'espaces de Hilbert dans cette nouvelle catégorie qui sont infiniment loin l'un de l'autre, en d'autres termes il n'existe pas d'isomorphie complète entre eux) et a généralisé dans [Pis98] (aussi Junge) la notion d'opérateurs $p-$sommants au cas non-commutatif.

Dans ce chapitre on va généraliser la notion d'opérateurs sous-linéaires p-sommants aux opérateurs sous-linéaires l_p-sommants (i.e., généralisé cette notion au cas non-commutatif). Ainsi le théorème de domination de Pietsch aux opérateurs sous-linéaires l_p-sommants cas non commutatif.

Et comme un deuxième résultat de ce chapitre. On généralisera la notion d'opérateurs sous-linéaires fortement $p-$sommants au cas non commutatif. On donnera le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs sous-linéaires fortement l_p-sommants cas non commutatif.

4.2 Espace des opérateurs

Dans cette section on va rappeler quelques notations, définitions et propriétés concernant les espace d'opérateurs.

Notation

Soit H un espace de Hilbert et $X \subset B(H)$ un sous espace fermé. Pour tout $n \geq 1$, on note par $M_n(X) = M_n \otimes X$ l'espace des matrices carrées $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $x_{ij} \in X$ équipé de la norme induite par l'espace $M_n(B(H)) = B(l_2^n(H)) = B(l_2^n \otimes_2 H)$ ($l_2^n \otimes_2 H$ est l'espace de Hilbert produit tensoriel de l_2^n par H).

Définition IV.2.1

Un espace d'opérateurs X est un sous espace fermé d'un $B(H)$ pour un espace de Hilbert H.

Définition IV.2.2

Soit X un espace vectoriel. Si pour tout $n \in N$, il existe une norme $\|.\|_n$ sur $M_n(X)$, la suite des normes $\{\|.\|_n\}_{n \geq 1}$ est appelée une $L_\infty-$structure matricielle sur X si

$$\begin{array}{lll} \textbf{(a)} & \|axb\|_n & \leq \|a\|_{M_n(\mathbb{C})} \|x\|_n \|b\|_{M_n(\mathbb{C})} \\ \textbf{(b)} & \|x \oplus y\|_{n+m} & = \left\| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\} \end{array}$$

pour tout a, b dans $M_n(\mathbb{C}) = B(l_2^n)$, $x \in M_n(X)$ et $y \in M_m(X)$.

Remarque IV.2.3

Un espace d'opérateur qui est un Banach réticulé (resp. Banach complètement réticulé) est dit un espace Banach réticulé quantique (resp. Banach complètement réticulé quantique).

On dira que X est L_∞-matriciellement normé s'il est équipé d'une $L_\infty-$structure matricielle (qu'on suppose complète). Ruan a montré dans[Rua88] puis simplifié (avec Effros) dans [ER93] un important théorème qui est la caractérisation matricielle des espaces d'opérateurs. Ce théorème est le suivant : Pour toute $L_\infty-$structure matricielle sur un espace vectoriel X, il existe un espace de Hilbert H et un plongement isométrique de X dans $B(H)$ tel que pour tout $n \geq 1$, la norme $\|.\|_n$sur $M_n(X)$ coïncide avec la norme induite par l'espace $B(l_2^n(H))$. En d'autres termes, il a donné une caractérisation abstraite des espaces d'opérateurs.

Définition IV.2.4

Soient H, K des espaces de Hilbert. Soit $X \subset B(H)$ et $Y \subset B(K)$ deux espaces d'opérateurs. Une application linéaire $u : X \longrightarrow Y$ est complètement bornée (en abrégé c.b) si les applications

$$\begin{array}{rcccl} u_n & : & M_n(X) & \longrightarrow & M_n(Y) \\ & & (x_{ij})_{1\leq i,j\leq n} & \longmapsto & (u(x_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \end{array}$$

sont uniformément bornées quand $n \longrightarrow +\infty$, i.e., $\sup\limits_{n\geq 1} \|u_n\| < +\infty$.

Dans ce cas on pose,

$$\|u\|_{cb} = \sup_{n\geq 1} \|u_n\| \tag{4.1}$$

et on dénote par $cb(X, Y)$ l'espace de Banach de toutes les applications complètement bornées de X dans Y qui est lui aussi un espace d'opérateurs $(M_n(cb(X, Y)) = cb(X, M_n(Y))$, voir [BP91] et [ER91]. On dénote aussi par $X \otimes_{\min} Y$ le sous espace de $B(H \otimes_2 K)$ muni de la norme induite. On a

$$\|u\| \leq \|u\|_{cb}. \tag{4.2}$$

Soit H un espace de Hilbert. On dénote par $S_p(H)$ $(1 \leq p < \infty)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs compacts $u : H \longrightarrow H$ tel que $Tr(|u|^p) < \infty$, muni de la norme

$$\|u\|_{S_p(H)} = (Tr(|u|^p))^{\frac{1}{p}}.$$

Si $H = l_2$ (resp. l_2^n), on dénote simplement $S_p(l_2)$ par S_p (resp. $S_p(l_2^n)$ par S_p^n). On dénote aussi par $S_\infty(H)$ (resp. S_∞) l'espace de Banach de tous les opérateurs compacts muni de la norme induite par $B(H)$ (resp. $B(l_2)$) ($S_\infty^n = B(l_2^n)$). Rappelons que si $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ $(1 \leq p, q, r < \infty)$, alors

$$u \in B_{S_p(H)} \text{ ssi il existe } u_1 \in B_{S_q(H)}, u_2 \in B_{S_r(H)} \text{ tels que } u = u_1 u_2$$

où $B_{S_p(H)}$ est la boule unité fermée de $S_p(H)$.

Avant de continuer notre travail on mentionnera quelques propriétés concernant les opérateurs complètement bornés. On rappelle que OH est homogène, en d'autres termes, tout opérateur linéaire borné $u : OH \longrightarrow OH$ est $c.b.$ et

$$\|u\| = \|u\|_{cb}. \tag{4.3}$$

Notons aussi que S_2 est complètement isométrique à $OH \times OH$. On dénote par OH_n la version $n-$dimensionnelle de l'espace de Hilbert d'opérateurs OH. Si maintenant S_2^N $(N \in \mathbb{N})$ est muni de la structure d'espace d'opérateurs de OH_{N^2}, alors pour tout opérateur linéaire $T : S_2^N \longrightarrow OH_N$ on a par homogénéité de OH

$$\|T\| = \|T\|_{cb}. \tag{4.4}$$

Remarque IV.2.5

Nous rappelons que l'existence de OH est dû à [Pis96] où il affirme que pour tout ensemble I, il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (séparable si I est dénombrable) et un espace d'opérateurs $OH(I)$ inclus dans $B(\mathcal{H})$ tels que

(i) $OH(I)$ est isométrique à $l_2(I)$ comme espace de Banach,

(ii) L'identification canonique entre $OH(I)$ et $\overline{OH(I)^\star}$ (correspondant à l'identification canonique entre $l_2(I)$ et $\overline{l_2(I)^\star}$) est une isométrie complète.

En outre, l'espace $OH(I)$ est l'unique espace d'opérateurs (à une isométrie complète près) possédant les propriétés (i) et (ii). De plus, on a :

(iii) Soit $(\theta_i)_{i\in I}$ une base orthonormale quelconque de $OH(I)$. Alors pour tout espace de Hilbert K et toute suite finie (a_i) dans $B(K)$, on a

$$\left\|\sum_{i\in I}\theta_i\otimes a_i\right\|_{B(\mathcal{H}\otimes K)}=\left\|\sum_{i\in I}a_i\otimes\overline{a}_i\right\|^{\frac{1}{2}}_{B\left(K\otimes\overline{K}\right)}. \tag{4.5}$$

On termine par noter OH l'espace $OH(\mathbb{N})$ et OH_n l'espace $OH(I)$ pour $I=\{1,2,...,n\}$.

Dans la catégorie des espaces de Banach classiques l'analogue du théorème précédent est le suivant :

Si X est un espace de Banach pour qui, il existe une injection linéaire bornée $v:X\longrightarrow l_2$ telle que l'application $\overline{v^\star}v:X\longrightarrow\overline{X^\star}$ est une isométrie injective, alors X est isométrique à un espace de Hilbert (et donc v est alors une isométrie). Notons qu'un opérateur linéaire borné $j:X\longrightarrow\overline{X^\star}$ est "positif" *i.e.,*

$$\forall x\in X\quad j(x)(x)\geq 0$$

si est seulement si, il existe un espace de Hilbert H et un opérateur linéaire borné $v:X\longrightarrow H$ tel que $j=\overline{v^\star}v$.

Finalement nous rappellerons la dernière propriété de cette introduction. Soit Y un espace d'opérateurs tel que $Y\subset A$ (A une C^*-algèbre commutative) $\subset B(H)$. Soit X un espace d'opérateurs arbitraire. Alors, pour tout opérateur linéaire borné $u:X\longrightarrow Y$, on a

$$\|u\| = \|u\|_{cb}\,. \tag{4.6}$$

Soit maintenant X un espace d'opérateurs. Comme d'habitude on note par $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ (resp. des suites finies $\{x_1, ..., x_n\}$) dans X muni de la norme $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$ (resp. $(\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$) qui devient un espace d'opérateurs. Soit $S_p[X]$ (pour plus de détails voir [Pis98] (resp. $S_p^n[X]$) le sous espace de $M_\infty(X)$ (resp. $M_n(X)$) muni de la norme

$$\|u\|_{S_p[X]} = \inf_{u=avb}\{\ \|a\|_{S_{2p}} \|v\|_{M_\infty(X)} \|b\|_{S_{2p}}\}$$

$$(resp.\ \|u\|_{S_p^n[X]} = \inf_{u=avb}\{\ \|a\|_{S_{2p}^n} \|v\|_{M_n(X)} \|b\|_{S_{2p}^n}\})$$

où

$$M_\infty(X) = \left\{u = (u_{ij})_{1\le i,j\le\infty} : \forall n \ge 1, \left\|(u_{ij})_{1\le i,j\le n}\right\|_{M_n(X)} \le K\right\}$$

et

$$\left\|(u_{ij})_{1\le i,j\le\infty}\right\|_{M_\infty(X)} = \inf K \tag{4.7}$$

qui est un sous espace de $B(l_2 \otimes_2 H)$. Nous conseillons aux lecteurs intéressés de consulter la thèse de L. Mezrag [Mez03].

4.3 Opérateurs l_p-sommants cas non-commutatif

Nous allons commencer en premier lieu par donner la définition suivante qui est une généralisation aux opérateurs sous-linéaires cas non commutatif. Cette définition a été introduite au cas linéaire par M. Junge dans [Jun96].

Définition IV.3.1

Soit H un espace de Hilbert et $X \subset B(H)$ un espace d'opérateurs. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire de X dans Y un espace de Banach réticulé quantique. On dira que T est l_p-sommant $(1 \leq p < \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$ et toute suite finie $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ dans X, on a

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{a,b\in B^+_{S_{2p}}} (\sum_{i=1}^{n} \|ax_ib\|^p_{S_p(H)})^{\frac{1}{p}}. \tag{4.8}$$

on note par $\pi_{l_p}(T)$ la plus petite constante C vérifiant l'inégalité (4.8) et par $\pi_{l_p}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs sous-linéaires l_p-sommants muni de la norme $\pi_{l_p}(.)$. On pourra montrer que

$$\begin{aligned} \sup_{a,b\in B^+_{S_{2p}(H)}} (\sum_{n=1}^{\infty} \|ax_ib\|^p_{S_p(H)})^{\frac{1}{p}} &= \|\{x_i\}\|_{l^n_p\otimes_{\min}X} \\ \left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes x_i\right\|_{cb\left(l^n_q,X\right)} &= \|u\|_{cb} \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $u : l^n_q \longrightarrow X$ tel que $u(e_i) = x_i$.

Où q est le conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de l^n_q.

D'après (4.9), la définition IV.3.1 est équivalente à :

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ dans X et u dans $cb(l^n_q, X)$ tel que $u(e_i) = x_i$, on a

$$(\sum_{i=1}^{n} \|Tu\,(e_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C\,\|u\|_{cb}\,. \tag{4.10}$$

Proposition IV.3.2

Soient E, X des espaces d'opérateurs et soient Y, F des espaces de Banach réticulés quantiques. Soit le diagramme

$$l_q^n \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{w} F$$

tel que v est un opérateur linéaire complètement borné, T est l_p-sommant et w est un opérateur linéaire positif et borné. Alors,

$$\pi_{l_p}(wTv) \leq \|w\|\,\pi_{l_p}(T)\,\|v\|_{cb}\,.$$

Preuve

L'opérateur $wTvu$ est sous-linéaire d'après la Proposition I.4.2.

On a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|wTvu(e_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|w\| \sum_{i=1}^{n} (\|Tvu(e_i)\|^p)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (\|Tvu(e_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{l_p}(T) \sum_{i=1}^{n} (\|vu(e_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
\text{d'après (4.10)} \quad &= \pi_{l_p}(T)\,\|vu\|_{cb} \\
&= \pi_{l_p}(T)\,\|v\|_{cb}\,\|u\|_{cb}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|wTvu(e_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|w\|\,\pi_{l_p}(T)\,\|v\|_{cb}\,\|u\|_{cb}$$

par conséquent

$$wTv \in \pi_{l_p}(X,Y)$$

et

$$\pi_{l_p}(wTv) \leq \|w\| \, \pi_{l_p}(T) \, \|v\|_{cb} .$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition IV.3.3

Soit X un espace d'opérateurs et soit Y un espace de Banach réticulé quantique. Considérons T dans $\pi_p(X,Y)$. Alors, $T \in \pi_{l_p}(X,Y)$ et

$$\pi_{l_p}(T) \leq \pi_p(T) .$$

Preuve

L'opérateur $T \in \pi_p(X,Y)$ et $\pi_p(T) \leq C$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout $v : l_{p^*}^n \longrightarrow X$, tel que $v(e_i) = x_i$ on a

$$\left(\sum_1^n \|Tv(e_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|v\| .$$

On a aussi d'après (4.2) que $\|v\| \leq \|v\|_{cb}$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, ..., x_n\}$ dans X on a v est dans $cb(l_q^n, X)$ et aussi d'après (4.10) on a

$$(\sum_{i=1}^n \|Tv(e_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \|v\|_{cb} .$$

Donc $T \in \pi_{l_p}(X,Y)$ et

$$\pi_{l_p}(T) \leq \pi_p(T) .$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Remarque IV.3.4

Soit $X \subset A$ (A une C^*-algèbre commutative) $\subset B(H)$ un espace d'opérateurs et soit Y un espace d'opérateurs quelconque. Alors, d'après (4.6) et (4.10) on a

$$\pi_{l_p}(X,Y) = \pi_p(X,Y).$$

Le théorème suivant est l'extension du théorème de factorisation de Pietsch pour les opérateurs sous-linéaires l_p-sommants. C'est une adaptation d'une idée de Pisier, voir [Pis98]. Nous aurons besoin de la proposition suivante pour la factorisation proprement dite.

Proposition IV.3.5

Soient X, Y et Z trois espaces de Banach dont Y Banach réticulé, C une constante positive et T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y. Soit $v : X \longrightarrow Z$ un opérateur linéaire injectif tel que

$$\|T(x)\| \leq C\,\|v(x)\|.$$

Alors, il existe $\widetilde{T} : \overline{v(X)} \longrightarrow Y$ sous-linéaire continu tel que

$$T = \tilde{T} o v$$

et

$$\left\|\tilde{T}\right\| \leq C.$$

Preuve

On pose

$$\tilde{T}(z) = T(v^{-1}(z)).$$

Cette application est bien définie de $v(X)$ dans Z d'après l'injectivité de v, $\widetilde{T}$ et est sous-linéaire par définition. La continuité est immédiate par hypothèse puis on prolonge par continuité à $\overline{v(X)}$. ■

Théorème IV.3.6

Soient $X \subset B(H)$ un espace d'opérateurs et Y un espace de Banach réticulé quantique. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire. Soit C une constante positive et $1 \leq p < \infty$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

(a) *L'opérateur T est l_p-sommant et $\pi_{l_p}(T) \leq C$.*

(b) *Il existe un ensemble I, deux familles a_α, b_α dans $B^+_{S_{2p}}$ et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I tels que*

$$\forall x \in X, \qquad \|T(x)\| \leq C \lim_{\mathcal{U}} \|a_\alpha x b_\alpha\|_{S_p(H)}. \tag{4.11}$$

(c) *T se factorise de la forme $T = \tilde{T}(M/E_\infty)i$ et $\left\|\tilde{T}\right\| \leq C$*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ E_\infty & \xrightarrow{M/E_\infty} & E_p \\ \cap & & \cap \\ \hat{B}(H) & \xrightarrow{M} & \hat{S}_p(H) \end{array}$$

où

$i(x) = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ avec $x_\alpha = x$, $\forall \alpha \in I$, $E_\infty = i(X)$ qui est un sous espace fermé de $\hat{B}(H)$ et $\|i\|_{cb} = 1$.

L'espace $\hat{B}(H) = (B_\alpha(H))/\mathcal{U}$ avec $B_\alpha(H) = B(H)$, $\forall \alpha \in I$.

L'opérateur M est l'opérateur associé à $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ où $M_\alpha : B(H) \longrightarrow S_p(H)$ est défini par $M_\alpha(x) = a_\alpha x b_\alpha$ et $\pi_{l_p}(M) \leq 1$.
L'espace $\hat{S}_p(H) = (S_\alpha(H))/\mathcal{U}$ avec $S_\alpha(H) = S_p(H)$, $\forall\alpha \in I$ et $E_p = M(E_\infty)$ qui est un sous espace fermé de $\hat{S}_p(H)$.
Les espaces $\hat{B}(H)$ and $\hat{S}_p(H)$ sont des espaces d'opérateurs.

Preuve

(a)$\Longrightarrow$(b). Soit $S = \left\{(a,b) \in B_{S_{2p}(H)} \times B_{S_{2p}(H)}\,;\, a,b \geq 0\right\}$ et $C =$\{des fonctions réelles définies sur S de la forme

$$f_{\{x_i\}_{1\leq i\leq n}}(a,b) = C^p \sum_{i=1}^{n} \|ax_ib\|^p - \sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\}.$$

C est un cône convexe. En effet, soit $\lambda \geq 0$

$$\begin{cases} \lambda f_{\{x_i\}_{1\leq i\leq n}} & = & f_{\left\{\lambda^{\frac{1}{p}} x_i\right\}_{1\leq i\leq n}} \\ f_{\{x_i\}_{1\leq i\leq n}} + f_{\{y_j\}_{1\leq j\leq m}} & = & f_{\{z_k\}_{1\leq k\leq n+m}} \end{cases}$$

où

$\{z_k\}_{1\leq k\leq n+m} = \{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m\}$.
Par hypothèse on a

$$\sup_{(a,b)\in S} f_{\{x_i\}_{1\leq i\leq n}}(a,b) = C^p \sup_{(a,b)\in S} \sum_{i=1}^{n} \|ax_ib\|^p - \sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p \geq 0$$

et ceci pour toute f dans le cône convexe ouvert C qui est dans $l_\infty(S)$ qui est égale à $C(\widehat{S})$ où $\hat{S}$ est le compactifié de Stone Cěch de S. Soit F le sous ensemble de $C(\widehat{S})$ tel que $\sup\limits_{(a,b)\in S} f_{\{x_i\}_{1\leq i\leq n}}(a,b) < 0$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe λ une probabilité sur $\hat{S}$ telle que $\lambda(f) \geq 0$. Donc il existe un ensemble I, un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I et une famille des probabilités $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ des supports finis sur S telles que

$$\lambda_\alpha \underset{\sigma(l_\infty^\star(S), l_\infty(S))}{\longrightarrow} \lambda$$

et

$$\forall f \in C, \int_{\hat{S}} f(a,b)\, d\lambda(a,b) = \lim_{\mathcal{U}} \int_{\hat{S}} f(a,b)\, d\lambda_\alpha(a,b) \geq 0.$$

En particulier si

$$f(a,b) = C^p \|axb\|^p - \|T(x)\|^p$$

on aura

$$\lim_{\mathcal{U}} \int_{\hat{S}} f(a,b)\, d\lambda_\alpha(a,b) = C^p \lim_{\mathcal{U}} \int_{\hat{S}} (\|axb\|^p_{S_p(H)} - \|T(x)\|^p) d\lambda_\alpha(s) \geq 0$$

$(\lambda_\alpha = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha_j} \delta\left(a_{\alpha_j}, b_{\alpha_j}\right)$ avec $\sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha_j} = 1$ et $\lambda_{\alpha_j} \geq 0)$.
D'après le Lemme1.14 [Pis98] on a

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^p &\leq C^p \lim_{\mathcal{U}} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha_j} \left\|a_{\alpha_j} x b_{\alpha_j}\right\|^p_{S_p(H)} \quad (a_{\alpha_j}, b_{\alpha_j} \geq 0) \\
&\leq C^p \lim_{\mathcal{U}} \left\| (\sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha_j} a_{\alpha_j}^{2p})^{\frac{1}{2p}} .x.(\sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha_j} b_{\alpha_j}^{2p})^{\frac{1}{2p}} \right\|^p_{S_p(H)} \\
&\leq C^p \lim_{\mathcal{U}} \|a_\alpha x b_\alpha\|^p_{S_p(H)}.
\end{aligned}$$

(b)$\Longrightarrow$(c)

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{T} & Y \\
i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\
E_\infty & \xrightarrow{M/E_\infty} & E_p \\
\cap & & \cap \\
\hat{B}(H) & \xrightarrow{M} & \hat{S}_p(H)
\end{array}$$

$\|T(x)\| \leq C \lim\limits_{\mathcal{U}} \|a_\alpha x b_\alpha\|_{S_p(H)} = C \|M/E_\infty \circ i(x)\|_{E_p}$, donc d'après la proposition IV.3.5 il existe $\tilde{T} : E_p \longrightarrow Y$ tel que $\left\|\tilde{T}\right\| \leq C$, $T(x) = \tilde{T} \circ (M/E_\infty) \circ i(x)$ et $\pi_{l_p}(M/E_\infty) \leq 1$.
(c)$\Longrightarrow$(a). Elle est évidente et ceci complète la démonstration. ■

Lemme IV.3.7 ([Mez02])
Soit $X \subset B(H)$ un espace d'opérateurs. Considérons $a, b \in B^+_{S_{2p}}$ et $1 \leq p \leq q < \infty$. Alors,

$$\forall x \in X, \quad \|axb\|_{S_p(H)} \leq \left\|a^{\frac{p}{q}} x b^{\frac{p}{q}}\right\|_{S_q(H)}.$$

Preuve
Soit x dans X et considérons a, b dans $B^+_{S_{2p}}$. On a

$$\begin{aligned}
\|axb\|_{S_p(H)} &= \left\|a^{1-\frac{p}{q}} a^{\frac{p}{q}} x b^{\frac{p}{q}} b^{1-\frac{p}{q}}\right\|_{S_p(H)} \\
&\leq \left\|a^{1-\frac{p}{q}}\right\|_{S_{\frac{2pq}{q-p}}} \left\|a^{\frac{p}{q}} x b^{\frac{p}{q}} b^{1-\frac{p}{q}}\right\|_{S_{\frac{2pq}{q-p}}} \\
&\leq \left\|a^{1-\frac{p}{q}}\right\|_{S_{\frac{2pq}{q-p}}} \left\|a^{\frac{p}{q}} x b^{\frac{p}{q}}\right\|_{S_q(H)} \left\|b^{1-\frac{p}{q}}\right\|^{1-\frac{p}{q}}_{S_{\frac{2pq}{q-p}}} \\
&\leq \left\|a^{\frac{p}{q}} x b^{\frac{p}{q}}\right\|_{S_q(H)} \left(\text{car } \left\|a^{1-\frac{p}{q}}\right\|_{S_{\frac{2pq}{q-p}}} = \|a\|^{\frac{q-p}{q}}_{S_{2p}} \leq 1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{M(a,b)} & S_p(H) \\
M(a^{\frac{p}{q}}, b^{\frac{p}{q}}) \searrow & & \nearrow M(a^{1-\frac{p}{q}}, b^{1-\frac{p}{q}}) \\
& S_q(H) &
\end{array}$$

et ceci illustre que le diagramme est commutatif. ■

Proposition IV.3.8
Soient $1 \leq p \leq q < \infty$. Soit $X \subset B(H)$ un espace d'opérateurs et Y un quantum espace Banach. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire l_p-sommant. Alors, T est l_q-sommant et $\pi_{lq}(T) \leq \pi_{lp}(T)$.

Preuve

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &\leq \pi_{lp}(T)\lim_{\mathcal{U}}\|a_\alpha x b_\alpha\|_{S_p(H)}\\ &\leq \pi_{lp}(T)\lim_{\mathcal{U}}\left\|a_\alpha^{\frac{p}{q}} x b_\alpha^{\frac{p}{q}}\right\|_{S_q(H)} \quad \text{(d'après le lemme IV.3.7)}\end{aligned}$$

où $a_\alpha^{\frac{p}{q}}, b_\alpha^{\frac{p}{q}}$ sont dans $B^+_{S_{2q}}$ et on obtient la comparaison. ■

4.4 Opérateurs fortement l_p-sommants cas non commutatifs.

Dans ce paragraphe, On généralisera la classe des opérateurs sous-linéaires fortement l_p-sommants définie dans le précédent chapitre au cas non commutatif. On donne le théorème de domination. On utilisant le théorème de Hahn-Banach contrairement au cas commutatif où on a utilisé le lemme de Ky Fan.

Définition IV.4.1

Soient X un espace de Banach, Y un Banach réticulé quantique. Un opérateur sous-linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est fortement l_p-sommant ($1 < p < \infty$), s'il existe une constante positive C telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, y_2^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\|(\langle T(x_i), y_i^*\rangle)\|_{l_1^n} \leq C(\sum_{i=1}^n \|(x_i)\|_X^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{a,b\in B^+_{S_{2p^*}}} \|(ay_i^*b)\|_{l^n_{p^*}(S_{p^*}(\mathcal{K}_*))}. \tag{4.12}$$

Où $\mathcal{K}_*$ est un espace de Hilbert tel que $Y^* \subset B(\mathcal{K}_*)$, car d'après [Ble92b] est un espace d'opérateur et d'après [Rua88] il existe $\mathcal{K}_*$ tel que $Y^* \subset B(\mathcal{K}_*)$.
La classe de tous les opérateurs sous-linéaires fortement l_p-sommants de X dans Y, est noté par $\mathcal{D}_{l_p}(X, Y)$. On note par $d_{l_p}(T)$ la petite constante C vérifiant l'inégalité (4.12).

Remarque IV.4.2

Considérons $T \in SL(X,Y)$. L'opérateur sous-linéaire T est fortement l_p-sommant si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in B(l^n_{p^*}, Y^*)$ $(v(e_i) = y_i^*$ ou $v = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \otimes y_i^*)$, on a d'après (4.10)

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), v(e_i)\rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|(x_i)\|_X^p)^{\frac{1}{p}} \|v\|_{cb}. \tag{4.13}$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_{l_1}(X,Y) = SB(X,Y)$.

Comme conséquence $\mathcal{D}_p(X,Y) \subset \mathcal{D}_{l_p}(X,Y)$ et $d_{l_p}(T) \leq d_p(T)$.

Proposition IV.4.4

Soit X un espace de Banach et Y, Z sont deux espaces de Banach réticulés quantiques. Soient $T \in SB(X,Y)$, R un opérateur linéaire positif dans $B(Y,Z)$ et $S \in B(E,X)$.

(a) *Si T est un opérateur sous-linéaire fortement l_p-sommant, alors ; $R \circ T$ est un opérateur sous-linéaire fortement l_p-sommant et $d_{l_p}(R \circ T) \leq \|R\| d_{l_p}(T)$.*

(b) *Si T est un opérateur sous-linéaire fortement l_p-sommant, alors ; $T \circ S$ est un opérateur sous-linéaire fortement l_p-sommant et $d_{l_p}(T \circ S) \leq \|S\| d_{l_p}(T)$.*

Preuve

(a). Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ et $z_1^*, ..., z_n^* \in Z^*$. Il suffit d'utiliser (4.13) pour démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle R \circ T(x_i), z_i^*\rangle| \leq \|R\| d_p(T)(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p)^{\frac{1}{p}} \|v\|_{cb}$$

où $v : Z \longrightarrow l^n_{p^*}$ tel que $v(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^*(z) e_i$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\langle R \circ T(x_i), z_i^*\rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), R^*(z_i^*)\rangle| \\ &\leq d_p(T)(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \|w\| \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w(y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R^*(z_i^*), y\rangle\, e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle z_i^*, R(y)\rangle\, e_i \\ &= \|R(y)\| \sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^*, \tfrac{R(y)}{\|R(y)\|} \right\rangle e_i. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|w\| &\leq \|R\| \sup_{z\in B_Z} \left\|(z_i^*(z))_{1\leq i\leq n}\right\|_{l_{p^*}^n} \\ &\leq \|R\|\, \|v\|_{cb}. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $e_1, ..., e_n \in E$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$. On a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} |\langle T\circ S\,(e_i)\,, y_i^*\rangle| \\ = & \sum_{i=1}^{n} |\langle T\,(S\,(e_i))\,, y_i^*\rangle| \\ \leq & \; d_p(T)(\sum_{i=1}^{n} \|(S\,(e_i))\|_X^p)^{\frac{1}{p}}\, \|v\| \;\; (v(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^*(y)e_i) \\ \leq & \; d_p(T)\, \|S\|\, (\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_E^p)^{\frac{1}{p}}\, \|v\|_{cb}\,. \end{aligned}$$

Donc $d_{l_p}(T\circ S) \leq \|S\|\, d_{l_p}(T)$ ce qui termine la démonstration. ■

On va maintenant présenter le résultat principal de ce chapitre qu'est le théorème de domination concernant la classe des opérateurs sous-linéaires fortement l_p-sommants.

Théorème IV.4.5

Soit X un espace de Banach et Y un Banach réticulé quantique. Soit un opérateur $T \in SB\,(X,Y)$, T est fortement l_p-sommant $(1 < p < \infty)$ s'il existe un ensemble I deux familles a_α, b_α dans $B_{S_{2p}}^+$ et un ultrafiltre U dans I tels que pour tout $x \in X$, on a

$$|\langle T\,(x)\,, y^*\rangle| \leq d_{l_p}(T)\, \|x\| \lim_{\mathcal{U}} \|a_\alpha y^* b_\alpha\|_{S_p(\mathcal{K}_*)}\,. \tag{4.14}$$

L'inverse. S'il existe une constante positive C, un ensemble I et une a_α, b_α dans $B_{S_{2p}}^+$ et un ultrafiltre U dans I tel que pour tout $x \in X$ on a

$$|\langle T\,(x)\,, y^*\rangle| \leq C\, \|x\| \lim_{\mathcal{U}} \|a_\alpha y^* b_\alpha\|_{S_p(\mathcal{K}_*)} \tag{4.15}$$

alors $T \in \mathcal{D}_{l_p}(X;Y)$ *et* $d_{l_p}(T) \leq C$.

Dans ce cas

$$d_{l_p}(T) = \inf\{C > 0 : \text{ toute } C \text{ vérifiant l'inégalité (4.15)}\}.$$

Preuve

On démontre la première implication. Soit $S = \left\{(a,b) \in B_{S_{2p^*}(H)} \times B_{S_{2p^*}(H)} : a, b \geq 0\right\}$ et $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions dans S à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f_{\left((x_i),(y_i^*)\right)}(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(d_{l_p}(T)\,(\tfrac{1}{p}\,\|x\|^p + \tfrac{1}{p^*}\,\|ay_i^*b\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}) - |\langle T(x_i), y_i^*\rangle|) \tag{4.16}$$

où $(x_i)_{1\leq i\leq n} \subset X$, et $(y_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset Y^*$.

L'ensemble $\mathcal{K}$ est un cône convexe. En effet. Soient f_1, f_2 dans $\mathcal{K}$ et $\lambda \geq 0$ tels que

$$f_{1\left((x_i'),(y_i'^*)\right)}(a,b) =$$
$$\sum_{i=1}^{k}(\tfrac{d_{l_p}}{p}\,\|x_i'\|^p + \tfrac{d_{l_p}}{p^*}\,\|ay_i'^*b\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)} - |\langle T(x_i'), y_i'^*\rangle|)$$

et

$$f_{2\left((x_i''^j),(y_i''^*)\right)}(a,b) =$$
$$\sum_{i=1}^{l}(\tfrac{d_{l_p}}{p}\,\|x_i''\|^p + \tfrac{d_{l_p}}{p^*}\,\|ay_i''^*b\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)} - |\langle T(x_i''), y_i''^*\rangle|).$$

Il s'en suit (car T est positivement homogène)

$$\begin{aligned}
& \lambda f_{1\left((x_i'),(y_i'^*)\right)}(a,b) \\
= \; & \sum_{i=1}^{k}\lambda\sum_{i=1}^{k}(\tfrac{d_{l_p}}{p}\,\|x_i'\|^p + \tfrac{d_{l_p}}{p^*}\,\|ay_i'^*b\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)} - |\langle T(x_i'), y_i'^*\rangle|) \\
= \; & \sum_{i=1}^{k}(d_{l_p}(T)\,(\tfrac{1}{p}\left\|\lambda^{\frac{1}{p}}x_i'\right\|^p + \tfrac{1}{p^*}\left\|a\lambda^{\frac{1}{p^*}}y_i'^*b\right\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}) - \left|\left\langle T\left(\lambda^{\frac{1}{p}}x_i'\right), \lambda^{\frac{1}{p^*}}y_i^*\right\rangle\right|) \\
= \; & f_{\left(\left(\lambda^{\frac{1}{p}}x_i'\right),\left(\lambda^{\frac{1}{p^*}}y_i'^*\right)\right)}(a,b)
\end{aligned}$$

et finalement on a

$$f_1 + f_2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(d_{l_p}(T)\,(\tfrac{1}{p}\,\|x\|^p + \tfrac{1}{p^*}\,\|ay_i^*b\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}) - |\langle T\,(x_i)\,, y_i^*\rangle|)$$

avec $n = k + l$,

$$x_i = \begin{cases} x_i' & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k, \\ x_i'' & \text{si} \quad k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

et

$$y_i^* = \begin{cases} y_i'^* & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k, \\ y_i''^* & \text{si} \quad k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En utilisant l'identité élémentaire suivante

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \quad \alpha\beta = \inf_{\epsilon > 0}\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{\alpha}{\epsilon}\right)^p + \frac{1}{p^*}\,(\epsilon\beta)^{p^*}\right\}. \tag{4.17}$$

on aura

$$\begin{aligned}
& \sup_{(a,b)\in S} f_{\left((x_i),\left(y_i^*\right)\right)}(a,b) \\
= \quad & \sup_{(a,b)\in S} \sum_{i=1}^{n}(d_{l_p}(T)\,(\tfrac{1}{p}\,\|x\|^p + \tfrac{1}{p^*}\,\|ay_i^*b\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}) - |\langle T\,(x_i)\,, y_i^*\rangle|) \\
= \quad & \tfrac{d_{l_p}(T)}{p}\sum_{i=1}^{n}\|x\|^p + \tfrac{d_{l_p}(T)}{p^*}\sup_{(a,b)\in S}\|ay_i^*b\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)} - |\langle T\,(x_i)\,, y_i^*\rangle| \\
\geq \quad & d_{l_p}(T)\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{(a,b)\in S}\left(\sum_{i=1}^{n}\|ay_i^*b\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}\right)^{\frac{1}{p^*}} - |\langle T\,(x_i)\,, y_i^*\rangle| \\
\geq \quad & 0 \text{ (d'après l'hypothèse voir (4.12))}
\end{aligned}$$

et ça pour tout f dans le cône convexe $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble ouvert de $l_\infty(S)$ tel que $\sup_{(a,b)\in S} f_{\left((x_i),\left(y_i^*\right)\right)}(a,b) < 0$. L'ensemble $\mathcal{K}$ et $\mathcal{C}$ sont disjoints dans $l_\infty(S)$ qui est isomorphiquement isométrique à $C(\widehat{S})$ l'espace des fonctions continues sur $\widehat{S}$ ($\widehat{S}$ est le compactifié de Stone Cĕch de S) à valeurs réelles. d'après le théorème de Hahn-Banach il existe une probabilité de mesure λ dans $\widehat{S}$ tel que $\lambda(f) \leq 0$ pour tout f dans $\mathcal{K}$. Par conséquent, il existe un ensemble I, un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I et une famille $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in I}$ des mesures de probabilités de supports finis dans S telles que

$$\lambda_\alpha \qquad \underset{\sigma\left(l_\infty^*(S),\, l_\infty(S)\right)}{\longrightarrow} \qquad \lambda$$

et

$$\forall f \in \mathcal{K},\ \int_{\hat{S}} f\left(a,b\right) d\lambda\left(a,b\right) = \lim_{\mathcal{U}} \int_S f\left(a,b\right) d\lambda_\alpha\left(a,b\right) \geq 0.$$

Particulièrement si en prend

$$f_{((x),(y^*))}(a,b) = \tfrac{d_{l_p}(T)}{p}\left\|x\right\|^p + \tfrac{d_{l_p}(T)}{p^*}\left\|ay_i^*b\right\|_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}^{p^*} - \left|\left\langle T\left(x_i\right), y_i^*\right\rangle\right|$$

on a

$$\lim_{\mathcal{U}} \int_S f\left(a,b\right) d\lambda_\alpha\left(a,b\right) = \tfrac{d_{l_p}(T)}{p}\left\|x\right\|^p + \tfrac{d_{l_p}(T)}{p^*}\lim_{\mathcal{U}}\left\|ay_i^*b\right\|_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}^{p^*} - \left|\left\langle T\left(x_i\right), y_i^*\right\rangle\right| \geq 0$$

($\lambda_\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha_k}\delta\left(a_{\alpha_k}, b_{\alpha_k}\right)$ avec $\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \lambda_{\alpha_k} = 1$ et $\lambda_{\alpha_k} \geq 0$).
Toujours d'après le Lemme1.14 [Pis98], on a

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle T\left(x\right), y^*\right\rangle\right| &\leq \tfrac{d_{l_p}(T)}{p}\left\|x\right\|^p + \tfrac{d_{l_p}(T)}{p^*}\lim_{\mathcal{U}}\sum_{k=1}^{n_\alpha}\lambda_{\alpha_k}\left\|a_{\alpha_k}y^*b_{\alpha_k}\right\|_{S_p(\mathcal{K}_*)}^{p^*}\ \left(a_{\alpha_k}, b_{\alpha_k} \geq 0\right) \\
&\leq \tfrac{d_{l_p}(T)}{p}\left\|x\right\|^p + \tfrac{d_{l_p}(T)}{p^*}\lim_{\mathcal{U}}\left\|\left(\sum_{k=1}^{n_\alpha}\lambda_{\alpha_k}a_{\alpha_k}^{2p^*}\right)^{\frac{1}{2p^*}}.y^*.\left(\sum_{j=1}^{n_\alpha}\lambda_{\alpha_k}b_{\alpha_k}^{2p^*}\right)^{\frac{1}{2p^*}}\right\|_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}^{p^*} \\
&\leq d_{l_p}\left(T\right)\left(\tfrac{1}{p}\left\|x\right\|^p + \tfrac{1}{p^*}\lim_{\mathcal{U}}\left\|a_\alpha y^*b_\alpha\right\|_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}^{p^*}\right).
\end{aligned}$$

Utilisant encore l'identité élémentaire (4.17). Fixons $\epsilon > 0$. Replaçons x par $\frac{1}{\epsilon}x, y^*$ par ϵy_i^* et prenons la borne inférieure pour $\epsilon > 0$, d'après (4.13) on trouve que

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle T\left(x\right), y^*\right\rangle\right| = \left|\left\langle T\left(\tfrac{1}{\epsilon}x\right), \epsilon y^*\right\rangle\right| \\
\leq\ & \left|\left\langle T\left(\tfrac{1}{\epsilon}\right), \epsilon y^*\right\rangle\right| \\
\leq\ & d_{l_p}\left(T\right)\left(\tfrac{1}{p}\left\|\tfrac{x}{\epsilon}\right\|^p + \tfrac{1}{p^*}\lim_{\mathcal{U}}\left\|a_i\epsilon y^*b_i\right\|_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}^{p^*}\right) \\
\leq\ & d_{l_p}\left(T\right)\left(\tfrac{1}{p}\left(\tfrac{\|x\|}{\epsilon}\right)^p + \tfrac{1}{p^*}\left(\epsilon(\lim_{\mathcal{U}}\left\|a_i\epsilon y^*b_i\right\|_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}\right)^{p^*}\right) \\
\leq\ & d_{l_p}\left(T\right)\left\|x\right\|\left(\lim_{\mathcal{U}}\left\|a_i\epsilon y^*b_i\right\|_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leq C\|x\| \lim_{\mathcal{U}} \|a_i \epsilon y^* b_i\|^{p^*}_{S_{p^*}(\mathcal{K}_*)}.$$

Pour montrer l'inverse. Soit $x \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$. On a d'après (4.15) que

$$|\langle T(x), y_i^*\rangle| \leq C\|x\| \lim_{\mathcal{U}} \|a_\alpha y^* b_\alpha\|_{S_p(\mathcal{K}_*)}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. On a

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y_i^*\rangle| & \leq & C\sum_{i=1}^{n}(\|x_i\| \lim_{\mathcal{U}} \|a_\alpha y_i^* b_\alpha\|_{S_p(\mathcal{K}_*)} \\ \text{(par Hölder)} & \leq & C(\sum_{i=1}^{n}(\|x_i\|)^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n} \lim_{\mathcal{U}} \|a_\alpha y_i^* b_\alpha\|^{p^*}_{S_p(\mathcal{K}_*)})^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq & C(\sum_{i=1}^{n}(\|x_i\|)^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{a,b \in B^+_{S_{2p}}} \left\| \left(\|a y_i^* b\|_{S_p(\mathcal{K}_*)} \right)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l^n_{p^*}}. \end{array}$$

Ce qui implique que $T \in \mathcal{D}_{l_p}(X;Y)$ et $d_{l_p}(T) \leq C$. ■

Corollaire IV.4.6

Considérons $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ *tels que* $p_1 \leq p_2$. *Si* $T \in \mathcal{D}_{l_{p_2}}(X;Y)$, *alors* $T \in \mathcal{D}_{l_{p_1}}(X;Y)$ *et*

$$d_{l_{p_1}}(T) \leq d_{l_{p_2}}(T).$$

Remarque IV.4.7

On a les mêmes relations entre les opérateurs sous-linéaires T et les opérateurs linéaires $u \in \nabla T$ qu'au cas commutatif.

4.5 Conclusion

On récapitule dans cette conclusion toutes les questions ouvertes. Elles seront suivi de quelques commentaires relatives aux travaux récents.

Question 1

Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y. Est-ce que T^* est continu ?

Question 2

Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y et u un opérateur linéaire positif de Y dans Z. Est-ce que

$$(u \circ T)^* = T^* \circ u^* \,?$$

Question 3

Soient X un espace de Köthe, Y un espace de a Banach complètement réticulé, T un opérateur sous-linéaire continu de X dans Y et u un opérateur linéaire de Y dans Z tel que u^* est positif. Est-ce que

$$(T \circ u)^* = u^* \circ T^* \,?$$

Question 4

Soient X, Y deux espaces de Banach réticulés et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous-linéaire continu. Si

$$T \in \pi_p^+ (X, Y)$$

alors on a

$$\forall u \in \nabla T, \quad u \in \pi_p^+ (X, Y) \,.$$

Est-ce que l'implication inverse est vérifiée ? Dans le cas général ou bien sous des conditions ?

Question 5

Soient X un espace de Banach réticulé et Y un espace de Banach complètement réticulé. Soit T un opérateur sous-linéaire borné de X dans Y. Supposons qu'il existe une constante positive finie $C > 0$, un ensemble I, un ultrafiltre U sur I et $\{u_i\}_{i\in I} \subset \nabla T$ tels que pour tout x dans X,

$$|\langle u_i(x), y^*\rangle| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} |\langle T(x), y^*\rangle|$$

et $d_p(u_i) \leq C$ uniformément . Alors,

$$T \in D_p(X, Y) \text{ et } d_p(T) \leq C.$$

Est-ce que cette propriété est vérifiée dans le cas général (sans la condition $|\langle u_i(x), y^*\rangle| \underset{\mathcal{U}}{\longrightarrow} |\langle T(x), y^*\rangle|$) ?

Bibliographie

[AM02] D. Achour et L. Mezrag, Factorisations des opérateurs sous linéaires par $L_{p\infty}$ et L_{q1}. Ann. Sci. Math. Quebec **26** (2002), 109-121.

[AM04] D Achour and L Mezrag, *Little Grothendieck's theorem for sublinear operators*. J. Math. Anal. Appl. **296** (2004), 541-552.

[BM01] M. T. Belaib & L. Mezrag, *Sur les opérateurs sous-linéaires $p-$sommants*. Sci. Tech. **15** (2001), 7-11.

[Bla86] O. Blasco. *A class of operators from a Banach lattice into a Banach space*. Collect. Math. **37** (1986), 13-22.

[Bla88] O. Blasco. *Positive $p-$summing operators from L_p-spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **31** (1988), 275-280.

[Bla87] O. Blasco. *Positive $p-$summing operators, vector measures and tensor products*. Proc. Edinburgh. Math. Soc. **100** (1987), 179-184.

[Ble92] D. Blecher. *Tensor products of operator spaces II*. Canadian J. Math. **44** (1992) 75-90.

[Ble92b] D. Blecher. *The standard dual of an operator space*. Pacific J. Math. **153** (1992) 15- 30.

[BP91] D. Blecher and V. Paulsen. *Tensor products of operator spaces*. J. Funct. Anal. **99** (1991) 262-292.

[BP] F. Bombal, D. Pérez-Garcia, I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*. To appear in Q. J. Math..

[Coh73] J. S. Cohen, *Absolutely $p-$summing, $p-$nuclear operators and their conjugates*. Math. Ann. **201** (1973), 177-200.

[Def01] A. Defant, *Variants of the Maurey -Rosenthal theorem for quasi-Köthe function spaces*. Positivity, **5** (2001), 153-175.

[DF93] A. Defant and K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*. North-Holland Mathematics Studies, 1993.

[DJT95] . Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, 1995.

[ER88] E. Effros and Z. J. Ruan. *On matricially normed spaces*. Pacific J. Math. **132** (1988) 243-264.

[ER91] E. Effros and Z. J. Ruan. *A new approch to operator spaces*. Canadian Math. Bull. **34** (1991) 329-337.

[ER93] E. Effros and Z. J. Ruan. *On the abstract characterization of operator spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993) 579-584.

[Gro56] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1956), 1-79.

[Hei80] S. Heinrich, *Ultraproducts in Banach space theory*. J. für die reine und Angew. Math. **313** (1980), 72-104.

[Hun67] R. A. Hunt, *On L_{pq} spaces,* Enseignement Math. **12** (1966), 249-276.

[HON81] S. Heinrich, G.H. Olsen and N.J. Nielsen, *Order bounded operators and tensor products of Banach lattices*. Math Scand. **49** (1981), 99-127.

[Jun96] M. Junge. *Factorization theory for spaces of operators*. Habilatationsschrift, Kiel University (Germany) (1996).

[Kad60] R. N. Kadison, *A representation theory for commutative topolgical algebra*. Mem. Amer. Math. Soc. **17** (1960).

[Kal77] N. J. Kalton, *The convexity type of a quasi-Banach space*. Unpublished note, (1977).

[Kri74] J. L. Krivine, *Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés.* Séminaire Maurey Schwartz 1973-1974, exposés **22** et **23**, Ecole Polytechnique, Paris.

[KPR84] N. J. Kalton, N. T. Peck, and J. W. Roberts, *An F-space sampler.* London Mathematical Society Lecture Notes Series, **89**, Cambridge University Press,Cambridge, (1984).

[Lem96] C. Le Merdy, *On the duality of operator spaces* . Canad. Math. Bull. **38** (3) (1996), 334-346.

[Lin92] Y. E. Linke, *Linear operators without subdifferentials.* Sibirskii Mathematicheskii Zhurnal, **32**(3) (1991), 219-221.

[LJ80] D. R. Lewis and N. Jægermann, *Banach lattice and unitary ideals.* J. Funct. Anal. (1980), 165-190.

[LP68] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\pounds_p$ spaces and their applications.* Studia Math. **29** (1968), 275-326.

[LT96] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, I and II.* Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Mau74] B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L_p.* Astérisque **11** (1974).

[Mey91] P. Meyer-Nieberg, *Banach lattices.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Mez85] L. Mezrag, *Théorèmes de factorisation et de prolongement pour les opérateurs à valeurs dans les espaces L_p, pour $p < 1$.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris A. **300** (1985), 299-302.

[Mez03] L. Mezrag, *Espaces d'opérateurs et géométrie des espace de Banach.* Sétif 2003.

[Mez04] L. Mezrag, *Factorization of operator valued L_p, for $0 \leq p < 1$.* Math. Nach. **266** (2004), 60-67.

[Mez02] L. Mezrag, *Comparison of non-commutative 2 and $p-$ summing operators from $B(l_2)$ into OH.* Z. Anal. Anwendungen **21** (2002), 709-717.

[MN91] P. Meyer-Nieberg. *Banach lattices.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, (1991).

[MT99] M. C. Matos and A. Tonge, *Polynomials and the Pietsch domination theorem.* Math. Proc. Royal Irish Acad. **2**(1999), 195-212.

[MT04] L. Mezrag and A. Tiaiba, *On the sublinear operators factoring through L_p.* Int. J. Math. Math. Sci. **50** (2004), 2695-2704.

[Nie73] N.J. Nielsen, *On Banach ideals determined by Banach lattices and their applications.* Dissertationes Math. **109** (1973), 1-62.

[Nik70] E. M. Nikishin, *Resonance theorems and superlinear operators.* Transl-of Cont. of Uspekhi, Mat. Nauk . **XXV (6)** Nov. Dec. (1970).

[Pal80] R. Pallu De La Barrière, *Convex analysis vector and set-valued measures.* Pub. Univ. Paris VI **33** (1980).

[Pie67] A. Pietsch, *Absolut p-summierende in Abbildungen in normierten Räumen.* Studia Math. **28** (1967), 333-353.

[Pie78] A. Pietsch, *Operator ideals.* North Holland, 1978.

[Pis86] G. Pisier, *Factorization of operators throught $L_{p\infty}$ or L_{p1} and non-commutative generalizations.* Math. Ann. **276** (1986), 105-136.

[Pis96] G. Pisier, *The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms,* Mem. Amer. Math. Soc. **122** (1996), 1-103.

[Pis98] G. Pisier. N*on-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps.* Astérisque (Soc. Math. France) **247** (1998) 1-131.

[Rau88] Z. J. Ruan. *Subspaces of C^*-Algebras.* J. Func. Analysis **76** (1988) 217-230.

[Sch74] H. H. Schaeffer. *Banach lattices and positive operators,* Springer-Verlag, Berlin and New York, (1974).

[Szu85] J. Szulga, *On $p-$ absolutely summing operators acting on Banach lattices.* Studia Math. **81** (1985), 53-63.

[Woj91] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysis*. Campridge University Press, 1991.

[Yan79] L. P. Yanovskii, *On summing and lattice summing operators and characterizations of AL-spaces* (in Russian). Sibirskii Mat. Zh. **20** (2) (1979), 401-408.

[Zaa97] A. C. Zaanen, *Introduction to operator theory in Riesz space*. Springer-Verlag, 1997.